VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a matematické statistiky

Michal Fusek
Irena Hlavičková

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně

http://www.umat.fekt.vut.cz

Verze: 24. srpna 2022

Obsah

Úvod

Tato sbírka příkladů je určena pro předmět Pravděpodobnost a statistika (IPT), který je vyučován v bakalářském stupni studia na FIT VUT v Brně. Jejím cílem je poskytnout studentům příklady k procvičení látky probírané v IPT. Zvládnutí a pochopení uvedených příkladů může podstatně zvýšit pravděpodobnost úspěchu u zkoušky. Sbírka bude postupně doplňována a aktuální verze bude ke stažení na stránce garanta předmětu. Právě čtete verzi z 24. srpna 2022.

1 Kombinatorika

Příklad 1.1. Turnaje se účastní 6 družstev. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

Řešení.

120

□

Příklad 1.2. Sázkař si chce vsadit na sportovní utkání. U každého zápasu lze zvolit 3 možnosti (0 – remíza, 1 – výhra domácích, 2 – výhra hostů). Kolika způsoby může vyplnit sázenku obsahující 10 utkání?

Řešení.

59 049

□

Příklad 1.3. V komunálních volbách kandiduje 5 politických stran. Vypočítejte, kolika možnými způsoby mohou výsledky voleb dopadnout, pokud žádné dvě strany nezískají stejný počet hlasů.

Řešení.

120

□

Příklad 1.4. Určete, kolika způsoby je možné srovnat do řady 2 šedé, 3 modré a 4 černé kostky.

Řešení.

1 260

□

Příklad 1.5. Ve třídě je 10 žáků. Kolika způsoby lze vybrat 4 z nich na vyzkoušení?

Řešení.

210

□

Příklad 1.6. V restauračním zařízení čepují 5 různých druhů piva. Pepa má velkou žízeň. Kolika způsoby si může dát 8 piv?

Řešení.

495

□

Příklad 1.7. Studenti mají za domácí úkol vyřešit dva příklady. Každému studentovi je náhodně přidělen jeden příklad ze sady A a jeden ze sady B. Sada A se skládá z 10 příkladů, sada B z 5 příkladů. Kolik různých variant domácího úkolu lze takto sestavit?

Řešení.

50

□

Příklad 1.8. Závodu v běhu se účastní 8 závodníků, mezi nimi Adam a Bedřich.

a) Kolika způsoby může závod dopadnout (neuvažujeme případ, že by více závodníků mělo stejný čas nebo že by někdo závod nedokončil)?

b) Kolik je možných pořadí, ve kterých je Adam před Bedřichem?

Řešení.

a) 40 320, b) 20 160

□

Příklad 1.9. V supermarketu zákazník při útratě vyšší než 500 Kč dostane sběratelskou kartičku s některou z postav z oblíbeného dětského kresleného seriálu. Kartiček je 10 různých typů.

a) Tomáškovi se podařilo nashromáždit 7 různých kartiček (duplicitní vyhazuje). Kolik je možností pro takovou sedmici?

b) Kolik existuje různých sedmic obrázků, ve kterých je obsažena Tomáškova nejoblíbenější postavička?

c) Kája má celkem 11 kartiček, počítáno včetně duplicitních. Kolik je možností pro takovouto sadu?

d) Kája má ve svých 11 kartičkách 3 se svou nejoblíbenější postavičkou, 2 s nejméně oblíbenou postavičkou a ostatní jsou každá jiná. Kolika způsoby může Kája obrázky přeskládat do řady?

e) (pro zájemce) Ella má celkem 18 kartiček, některé duplicitní, ovšem podařilo se jí získat od každého typu alespoň jednu kartičku. Kolik je možností pro takovouto sadu?

Řešení.

a) 120, b) 84, c) 167 960, d) 3 326 400, e) 24 310

□

2 Základní úlohy z pravděpodobnosti

Příklad 2.1. Házíme kostkou, dokud nepadne číslo 6.

a) Určete Ω.

b) Pomocí elementárních jevů zapište jev „pokus skončí při druhém hodu“ (jev A).

c) Pomocí elementárních jevů zapište jev „pokus skončí při třetím hodu“ (jev B).

Řešení.
a) $\Omega = \{[6], [1, 6], [2, 6], \dots, [1, 1, 6], [1, 2, 6], \dots, [5, 5, 6], \dots\}$
b) $A = \{[1, 6], [2, 6], \dots, [5, 6]\}$
c) $B = \{[1, 1, 6], [1, 2, 6], \dots, [5, 5, 6]\}$

$\square$

Příklad 2.2. Dřevěnou krychli o straně 4 cm natřeme na červeno. Pak ji rozřežeme na krychličky o délce strany 1 cm. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička

a) má právě 2 červené stěny,

b) nemá žádnou červenou stěnu?

Řešení.
a) $\frac{3}{8}$, b) $\frac{1}{8}$

$\square$

Příklad 2.3. Z karetní hry o 32 kartách náhodně vybereme (bez vracení) 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna z nich je eso?

Řešení.
$\frac{3097}{7192} \doteq 0{,}431$

$\square$

Příklad 2.4. Pepa z předchozí kapitoly se chystá z restaurace odjet na kole (přestože by ve svém stavu neměl). Kolo si zamknul zámkem, který má na společné ose 5 kotoučů. Na každém kotouči je 6 číslic. Zámek lze otevřít pouze zadáním správné kombinace číslic (pomineme kleště, pilku, autogen). Po množství zkonzumovaného alkoholu si však Pepa nemůže vybavit správnou kombinaci. Bude ji tedy volit náhodně. Je natolik unaven, že pokud se mu to nepovede napoprvé, tak své snažení vzdá a půjde domů pěšky. Jaká je pravděpodobnost, že Pepa otevře zámek?

Řešení.
$\frac{1}{7776} \doteq 0{,}0001286$

□

Příklad 2.5. Hodíme 2x kostkou. S jakou pravděpodobností bude součet na obou kostkách větší než 9?

Řešení.
$\frac{1}{6}$

□

Příklad 2.6. Píšeme za sebe náhodně vybrané tři číslice desítkové soustavy $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. Jaká je pravděpodobnost, že

a) napsané číslice budou různé,

b) právě dvě z číslic budou stejné,

c) všechny tři číslice budou stejné?

Řešení.
a) 0,72, b) 0,27, c) 0,01

□

Příklad 2.7. V osudí máme 5 bílých koulí a 7 černých koulí. Určete pravděpodobnosti následujících jevů.

a) Jev A značí, že náhodně vytažená koule je bílá.

b) Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev B značí, že obě koule jsou bílé.

c) Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev C značí, že obě koule jsou černé.

d) Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev D značí, že obě koule mají stejnou barvu.

e) Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev E značí, že každá koule má jinou barvu.

f) Náhodně vybereme 4 koule. Jev F značí, že všechny koule jsou černé.

Řešení.
a) $\frac{5}{12}$, b) $\frac{25}{144}$, c) $\frac{7}{22}$, d) $\frac{37}{72}$, e) $\frac{35}{66}$, f) $\frac{7}{99}$

□

Příklad 2.8. Hodiny, které nebyly včas nataženy, se po určité době zastaví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví

a) mezi 6 a 9,

b) přesně na 6,

c) kdekoliv kromě 6?

Řešení.
a) $\frac{1}{4}$, b) 0, c) 1

□

Příklad 2.9. Studenti mají za domácí úkol vyřešit dva příklady. Každému studentovi je náhodně přidělen jeden příklad ze sady A a jeden ze sady B. Sada A se skládá z 10 příkladů, sada B z 5 příkladů. Jaká je pravděpodobnost, že dvě kamarádky, Jana a Katka,

a) dostanou stejný první příklad,

b) dostanou stejné celé zadání,

c) dostanou alespoň jeden stejný příklad?

Řešení.
a) 0,1, b) 0,02, c) 0,28

□

Příklad 2.10. Zloděj ukradl platební kartu. Chce vybrat peníze, ale nezná PIN, takže se jej pokusí zadat náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se trefí na první pokus, jestliže

a) o PIN neví vůbec nic,

b) ví, že se PIN skládá z číslic 1, 2, 4, 7, jenom nezná pořadí,

c) ví, že se PIN skládá z číslic 4, 7, ale neví, v jakém jsou pořadí a kolikrát se tam která vyskytuje (obě však v PIN obsaženy určitě jsou)?

Řešení.
a) $\frac{1}{10\,000}$, b) $\frac{1}{24}$, c) $\frac{1}{14}$

□

Příklad 2.11. Lojza Lajdák dostal za úkol naprogramovat simulaci tahu Sportky: Měl by vygenerovat šestici navzájem různých čísel mezi 1 a 49.

Lojza však generuje pouze náhodnou šestici čísel mezi 1 a 49 a nijak neošetřil, aby čísla byla navzájem různá.

a) Jaká je pravděpodobnost, že při jednom spuštění jeho programu jeho nedbalost nevyjde najevo, tj. čísla budou navzájem různá?

b) Jaká je pravděpodobnost, že při dvou spuštěních jeho programu jeho nedbalost nevyjde najevo, tj. obou pokusech vyjde šestice bez opakování?

c) Kolikrát je potřeba program spustit, aby pravděpodobnost, že se Lojzova nedbalost projeví, byla větší než 0,9?

Řešení.
přibližně: a) 0,727, b) 0,529, c) alespoň 8krát

□

Příklad 2.12. Pozn. Literární pozadí tohoto poněkud morbidního příkladu bývá nastíněno ve cvičení.

Na tácu je 10 chlebíčků, z toho 4 jsou otrávené. Mary sní 3 chlebíčky. Jaká je pravděpodobnost, že

a) se Mary neotráví,

b) se Mary otráví, tj. sní alespoň jeden otrávený chlebíček,

c) Mary sní právě jeden otrávený chlebíček,

d) Mary sní nanejvýš jeden otrávený chlebíček?

Řešení.
a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{5}{6}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{2}{3}$

□

Příklad 2.13. Rozšířená varianta předchozího příkladu, pro zájemce, na hraní: Na tácu je 25 chlebíčků, z toho 12 otrávených. Mary sní 3 chlebíčky, ostatní hosté celkem 9 chlebíčků. Zbytek se vyhodí. Jaká je pravděpodobnost, že Mary se otráví, ale nikomu z ostatních se nic nestane?

Řešení.
přibližně $3{,}5 \cdot 10^{-4}$

□

Příklad 2.14. V akváriu je 15 rybiček, z toho 3 zlaté. Náhodně vylovíme 4 rybičky. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou právě dvě zlaté?

Řešení.

$\frac{198}{1\,365} \doteq 0{,}145$

$\square$

Příklad 2.15. Pozn. Postup popsaný v příkladu se používá pro odhad počtu živočichů v uzavřeném prostoru.

V rybníku je N ryb, z toho 50 jich dříve biologové nějak označili. Později bylo náhodně vyloveno 80 ryb a bylo zjištěno, že 20 z nich je označených.

Pro jakou hodnotu N je pravděpodobnost, že se toto stane, maximální?

Řešení.

$N \in \{199, 200\}$

$\square$

Příklad 2.16. Anna může přijít na oběd do menzy se stejnou pravděpodobností kdykoli mezi 12.00 a 13.00 a stráví tam vždy půl hodiny.

Bára může přijít se stejnou pravděpodobností kdykoli mezi 12.30 a 13.00 a je tam vždy čtvrt hodiny.

Carmen přijde vždy ve 12.30 a je tam vždy dvacet minut.

Jaká je pravděpodobnost, že se v menze potkají

a) Anna s Carmen,

b) Bára s Carmen,

c) Anna s Bárou,

d) všechny tři?

Řešení.

a) $\frac{5}{6}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{11}{16}$, d) $\frac{7}{16}$

$\square$

3 Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 3.1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly 2 pětky, je-li známo, že součet na obou kostkách je dělitelný 5?

Řešení.
$\frac{1}{7}$

□

Příklad 3.2. Mezi 5 granáty, které mají vojáci použít, jsou 2 cvičné. Dva vojáci si postupně vyberou každý jeden granát. Jaká je pravděpodobnost, že

a) první voják si vybere cvičný granát,

b) oba vojáci si vyberou cvičné granáty?

Řešení.
a) 0,4, b) 0,1

□

Příklad 3.3. Mějme klasický balíček 32 karet, ze kterého postupně vytáhneme dvě karty.

a) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme dvě esa?

b) Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená karta bude eso?

c) Jako druhou kartu jsme vytáhli eso. Jaká je pravděpodobnost, že i první vytažená karta byla eso?

Řešení.
a) $\frac{3}{248}$, b) $\frac{1}{8}$, c) $\frac{3}{31}$

□

Příklad 3.4. Házíme kostkou, dokud nepadne číslo 6. Jaká je pravděpodobnost, že pokus skončí při

a) druhém hodu,

b) třetím hodu?

Řešení.
a) $\frac{5}{36}$, b) $\frac{25}{216}$

□

Příklad 3.5. Lovec vystřelí na medvěda. Pravděpodobnost zásahu je 0,4. Jestliže medvěda netrefí, rozzuřené zvíře na lovce zaútočí. Lovec vystřelí znovu, tentokrát má pravděpodobnost zásahu p. Jestliže medvěda nezasáhne ani tentokrát, medvěd jej sežere. Určete hodnotu p tak, aby šance lovce a medvěda byly vyrovnané.

Řešení.
$\frac{1}{6}$

□

Příklad 3.6. Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahu při prvním, druhém a třetím výstřelu jsou postupně 0,4, 0,5, a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že střelec zasáhne cíl alespoň jedenkrát?

Řešení.
0,91

□

Příklad 3.7. Do obchodu s potravinami dodávají rohlíky stejného druhu 3 pekárny v počtech 500, 1000 a 1500 kusů denně. Zmetkovitost jejich dodávek je 5 %, 4 % a 3 %. Dodávky jsou v obchodě smíchány do celkové zásoby.

a) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný rohlík z celkové zásoby je zmetek.

b) Koupili jsme zmetek. Jaká je pravděpodobnost, že byl dodán 2. pekárnou?

c) Co kdyby nebyly dodávky v obchodě smíchány do celkové zásoby, ale zůstaly v oddělených regálech?

Řešení.
a) $0{,}03\overline{6}$, b) $0{,}\overline{36}$

□

Příklad 3.8. Obchod prodává skotskou a irskou whiskey. Skotská whiskey tvoří 70 % nabídky, přičemž 83 % je prvotřídní kvality. Z nabídky irské whiskey je 63 % prvotřídní kvality. Přes doporučení prodavače koupíme náhodnou láhev.

a) Jaká je pravděpodobnost, že zakoupená láhev není prvotřídní kvality?

b) Zakoupili jsme neprvotřídní whiskey. Jaká je pravděpodobnost, že je irská?

Řešení.

a) 0,23, b) $\doteq$ 0,4826

□

Příklad 3.9. Policejní jednotka s 18 členy střílí na pohyblivý terč. Pět z nich zasáhne terč s pravděpodobností 0,8, sedm z nich zasáhne s pravděpodobností 0,7 a čtyři z nich zasáhnout s pravděpodobností 0,6. Zbytek policistů jsou nováčci a pravděpodobnost zásahu je u nich 0,5. Náhodný policista vystřelil, ale terč nezasáhl. Jaká je pravděpodobnost, že policista je nováček?

Řešení.

$\frac{10}{57}$

□

Příklad 3.10. Tři myslivci vystřelí na medvěda. Pravděpodobnosti zásahu jsou 0,4 pro prvního myslivce, 0,55 pro druhého a 0,7 pro třetího. Určete pravděpodobnost, že medvěda někdo z nich trefí.

Řešení.

0,919

□

Příklad 3.11. Student dělá zkoušku, která se skládá ze dvou částí, písemné a ústní. Pro úspěšné složení zkoušky musí zvládnout obě části. Pokud student úspěšně zvládne písemnou část, může jít poté i na ústní. Pravděpodobnost, že student úspěšně zvládne písemnou část, je 0,7. Pravděpodobnost, že student udělá zkoušku, je 0,5. Určete pravděpodobnost, že student úspěšně zvládne ústní část zkoušky.

Řešení.

$\frac{5}{7}$

□

Příklad 3.12. Běží se Velká pardubická. Pravděpodobnost, že kůň shodí žokeje na liché překážce je 0,1, na sudé překážce je 0,2. Určete pravděpodobnost, že se kůň s žokejem v pořádku dostane k 5. překážce.

Řešení.

0,5184

□

Příklad 3.13. Házíme dvakrát klasickou šestistěnnou kostkou. Určete pravděpodobnost, že součet je dělitelný dvěma, když víte, že alespoň v jednom hodu padla trojka.

Řešení.

$\frac{5}{11}$

□

Příklad 3.14. K výrobě součástky je možné použít 2 technologie. První se skládá ze tří operací, při nichž jsou pravděpodobnosti vyrobení zmetku rovny postupně 0,1, 0,2, 0,3. Druhá technologie se skládá ze dvou operací, při nichž jsou pravděpodobnosti vyrobení zmetku 0,3. Určete, která technologie zajistí větší pravděpodobnost vyrobení dobré součástky.

Řešení.

0,504 (1. technologie), 0,49 (2. technologie)

□

Příklad 3.15. Máme šest šestistěnných kostek. Čtyři z nich jsou normální a dvě jsou nevyvážené a šestka na nich padá s pravděpodobností 0,5. Náhodně vybereme jednu kostku a třikrát s ní hodíme. Určete pravděpodobnost, že při všech třech hodech padla šestka.

Řešení.

$\doteq 0{,}04475$

□

Příklad 3.16. V písemce byly dva příklady. První z nich správně vyřešilo 60 % studentů, druhý 50 %.

Náhodně vybereme jednoho studenta.
Označíme jevy:
A ... student má správně první příklad
B ... student má správně druhý příklad

a) Určete pravděpodobnosti $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$.

b) Určete tyto pravděpodobnosti, jestliže k zadání přidáme informaci: Z těch, kdo měli správně první příklad, jich 3/4 měly správně i druhý. Toto pak platí i pro další části příkladu.

c) Dále určete pravděpodobnosti $P(\overline{A} \cap B), P(\overline{A} \cap \overline{B}), P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

d) Určete podmíněné pravděpodobnosti
$P(A|B), P(\overline{A}|B), P(A|\overline{B}), P(B|(A \cup B)), P(A|(A \cap B))$.

e) Rozhodněte, jestli jsou jevy A, B nezávislé.

Řešení.
a) $P(A) = 0{,}6, P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B)$ ani $P(A \cup B)$ nelze přesně určit, víme jen, že $0{,}1 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}5$; $0{,}6 \leq P(A \cup B) \leq 1$

b) $P(A \cap B) = 0{,}45, P(A \cup B) = 0{,}65$, c) 0,05; 0,35, 0,55, d) 0,9, 0,1, 0,3, 0,65, 1, e) ne

□

Příklad 3.17. Hodíme třemi hracími kostkami.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padnou tři šestky?

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne alespoň jedna šestka?

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 15?

d) Jestliže padl součet 15, jaká je pravděpodobnost, že padla aspoň jedna šestka?

Řešení.
a) $\frac{1}{216}$, b) $\frac{91}{216}$, c) $\frac{10}{216}$, d) $\frac{9}{10}$

□

Příklad 3.18. V určité populaci je 10 % alergiků. Předpokládejme, že při výběru životního partnera alergie nehraje roli. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybraném páru

a) mají alergii oba,

b) má alergii právě jeden,

c) nemá alergii nikdo,

d) má alergii alespoň jeden?

Řešení.
a) 0,01, b) 0,18, c) 0,81, d) 0,19

□

Příklad 3.19. Hrajeme počítačovou hru, která se skládá ze 3 levelů. Pravděpodobnost, že úspěšně projdeme 1. level, je 9/10. Jestliže jsme 1. level prošli, postupujeme do druhého, atd. Ve 2. levelu je pravděpodobnost úspěchu 2/3 a ve třetím 1/4.

Jaká je pravděpodobnost, že

a) úspěšně projdeme všechny 3 levely (tj. zvítězíme),

b) dostaneme se alespoň do druhého levelu?

Řešení.
a) $\frac{3}{20}$, b) 0,9

□

Příklad 3.20. Zloděj z příkladu 2.10, situace b), má na zadání PIN 3 pokusy, pak se karta zablokuje. Jaká je pravděpodobnost, že se mu podaří vybrat peníze, jestliže si

a) pamatuje své předchozí pokusy a pokaždé zadá jinou variantu,

b) předchozí pokusy nepamatuje a může tedy zopakovat i variantu, kterou už zkoušel?

Řešení.
a) $\frac{1}{8}$, b) $\frac{1\,657}{13\,824} \doteq 0{,}120$

□

Příklad 3.21. Pravděpodobnost, že dítě bude trpět určitou alergií, je 0,8, jsou-li oba jeho rodiče alergici. Je to 0,4, je-li jen jeden z rodičů alergik, a je to 0,1, jestliže žádný z rodičů alergií netrpí. V generaci rodičů je 10 % alergiků a při výběru partnera alergii nezohledňovali (viz příklad 3.18).

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané dítě má alergii?

b) Jestliže dítě má alergii, jaká je pravděpodobnost, že oba jeho rodiče jsou alergici?

Řešení.
a) 0,161, b) $\frac{8}{161} \doteq 0{,}0497$

□

Příklad 3.22. Z dlouhodobé zkušenosti víme, že 20 % výrobků jsou zmetky. Výrobky pak procházejí zkouškou kvality. Je-li výrobek nekvalitní, bude vyřazen s pravděpodobností 0,95. Je-li kvalitní, bude vyřazen s pravděpodobností 0,07.

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek zkouškou projde, tj. nebude vyřazen?

b) Výrobek zkouškou prošel. Jaká je pravděpodobnost, že je kvalitní?

c) Jaká je pravděpodobnost, že u náhodně vybraného výrobku výsledek zkoušky bude odpovídat realitě?

Řešení.
a) 0,754, b) přibl. 0,987, c) 0,934

□

Příklad 3.23. Studenti píší písemku. Někteří v pondělí, další v úterý a ostatní ve čtvrtek. Ve čtvrtek píše písemku 30% všech studentů. Počty studentů, kteří píší v pondělí a v úterý, jsou v poměru 2:3. Ze studentů, kteří psali v pondělí, má plný počet bodů 1%, z „úterních“ 2% a ze „čtvrtečních“ 4%.

a) Určete pravděpodobnosti toho, že náhodně vybraný student psal písemku v jednotlivých dnech.

b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má plný počet bodů?

c) Jestliže má student plný počet bodů, jaká je pravděpodobnost, že psal v úterý?

Řešení.

a) pondělí 0,28, úterý 0,42, čtvrtek 0,3, b) 0,0232, c) přibližně 0,362

□

Příklad 3.24. V dílně pracuje Standa Spolehlivý, Tom Tryskový a Ulrich Ulejvák. Z celkové produkce dílny vyrobí Standa 30 %, Tom 65 % a zbytek Ulrich.

Mezi Standovými výrobky je 1 % zmetků, mezi Tomovými 10 % zmetků a Ulrichovy výrobky jsou samé zmetky.

Je-li výrobek, který jsme náhodně vybrali z celkové produkce dílny, zmetek, kdo jej s největší pravděpodobností vyrobil?

Řešení.

Tom (s pravděpodobností $\frac{13}{29} \doteq 0{,}448$)

□

Příklad 3.25. Džem se plní do sklenic, ty se pak zavírají víčky. Pravděpodobnost, že sklenice není dokonale čistá, je 0,02. Pravděpodobnost, že není čisté víčko, je 0,01. Sklenice a víčka se vybírají nezávisle na sobě.

Je-li sklenice i víčko čisté, džem se zkazí s pravděpodobností 0,03. Pokud sklenice nebo víčko (případně obojí) čisté není, džem se zkazí s pravděpodobností 0,5.

Jestliže se džem zkazil, jaká je pravděpodobnost, že byl v čisté sklenici s čistým víčkem?

Řešení.

přibl. 0,661

□

Příklad 3.26. V zahradnictví mají 12 sazenic broskvoní, z čehož 3 jsou napadené chorobou (na první pohled to není vidět, ale při bližším ohledání to lze poznat). Pan Srstka si jde koupit jeden stromek. Náhodně vybere sazenici a prohlédne si ji. Jestliže je zdravá, koupí si ji. Jestliže je nemocná, s pravděpodobností 0,4 si toho nevšimne a koupí ji. Jestliže si choroby všimne, nekoupí nic.

a) Jaká je pravděpodobnost, že si pan Srstka koupí stromek?

b) Pan Srstka si koupil stromek. Jaká je pravděpodobnost, že je stromek zdravý?

Řešení.
a) 0,85, b) $\frac{15}{17} \doteq 0{,}882$

$\square$

Příklad 3.27. Máme 3 hrací kostky. Z toho dvě jsou normální a třetí je nevyvážená – šestka na ní padá s pravděpodobností 0,9. Náhodně vybereme jednu kostku a dvakrát s ní hodíme.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v obou hodech padne šestka?

b) Jestliže padly dvě šestky, jaká je pravděpodobnost, že házíme nevyváženou kostkou?

c) Jestliže padly dvě šestky, jaká je pravděpodobnost, že při dalším hodu toutéž kostkou opět padne šestka?

Řešení.
přibl. a) 0,289, b) 0,936, c) 0,853

$\square$

4 Náhodná veličina

4.1 Diskrétní náhodná veličina

Příklad 4.1. Střelec má celkem 3 náboje a střílí nezávisle na cíl až do prvního zásahu nebo dokud nevystřílí všechny náboje. Pravděpodobnost zásahu cíle při jednom výstřelu je 0,6. Náhodná veličina X představuje počet vystřelených nábojů.

a) Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X.

b) Jaká je pravděpodobnost, že počet vystřelených nábojů nebude větší než 2?

c) Jaký je střední počet vystřelených nábojů?

d) Jaký je rozptyl a směrodatná odchylka počtu vystřelených nábojů?

Řešení.

a) $p(x) = \begin{cases} 0{,}6, & x = 1 \\ 0{,}24, & x = 2 \\ 0{,}16, & x = 3 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}6, & 1 \le x < 2 \\ 0{,}84, & 2 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x \end{cases},$

b) $P(X \le 2) = 0{,}84$, c) $\mathrm{E}X = 1{,}56$, d) $\mathrm{D}X = 0{,}5664$, $\sigma(X) \doteq 0{,}7526$

□

Příklad 4.2. Náhodná veličina X má rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \frac{cx}{8}, \quad x \in 1, 3, 5, 7.$$

Určete

a) hodnotu parametru c,

b) pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X,

c) střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X,

d) pravděpodobnosti $P(X \le 5)$ a $P(X \ge 2)$.

Řešení.

$$\text{a) } c = \tfrac{1}{2}, \quad \text{b) } p(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & x = 1 \\ \frac{3}{16}, & x = 3 \\ \frac{5}{16}, & x = 5 \\ \frac{7}{16}, & x = 7 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{16}, & 1 \leq x < 3 \\ \frac{4}{16}, & 3 \leq x < 5 \\ \frac{9}{16}, & 5 \leq x < 7 \\ 1, & 7 \leq x \end{cases},$$

c) $\mathrm{E}X = \frac{21}{4}$, $\mathrm{D}X = \frac{55}{16}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{55}}{4}$, d) $P(X \leq 5) = \frac{9}{16}$, $P(X \geq 2) = \frac{15}{16}$

□

Příklad 4.3. Pro distribuční funkci náhodné veličiny X platí

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0{,}125, & 0 \leq x < 1, \\ 0{,}5, & 1 \leq x < 2, \\ 0{,}875, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

Určete

a) pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X,

b) pravděpodobnosti $P(X \geq 1)$ a $P(1 \leq X < 3)$.

Řešení.

$$\text{a) } p(x) = \begin{cases} 0{,}125, & x = 0 \\ 0{,}375, & x = 1 \\ 0{,}375, & x = 2 \\ 0{,}125, & x = 3 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad \text{b) } P(X \geq 1) = 0{,}875, \quad P(1 \leq X < 3) = 0{,}75$$

□

Příklad 4.4. Náhodná veličina X má rozdělení dané funkcí

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}2, & x = -1, \\ 0{,}1, & x = 0, \\ 0{,}3, & x = 1, \\ 0{,}4, & x = 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Y = -2X + 1$.

Řešení.
$\mathrm{E}Y = -0{,}8; \quad \mathrm{D}Y = 5{,}16$

$\square$

Příklad 4.5. Mezi 6 výrobky jsou 2 vadné. Náhodná veličina X udává počet vadných výrobků mezi 3 vybranými. Za předpokladu, že výrobky vybíráme bez vracení, určete

a) pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X,

b) pravděpodobnost, že vybereme alespoň 1 vadný výrobek,

c) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení.

a) $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x = 0 \\ \frac{3}{5}, & x = 1 \\ \frac{1}{5}, & x = 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{5}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{5}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \end{cases},$

b) $P(X \ge 1) = \frac{4}{5}$, c) $\mathrm{E}X = 1, \quad \mathrm{D}X = \frac{2}{5}$

$\square$

Příklad 4.6. Mezi 6 výrobky jsou 2 vadné. Náhodná veličina X udává počet vadných výrobků mezi 3 vybranými. Za předpokladu, že výrobky vybíráme s vracením, určete

a) pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X,

b) pravděpodobnost, že vybereme alespoň 1 vadný výrobek,

c) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení.

a) $p(x) = \begin{cases} \frac{8}{27}, & x = 0 \\ \frac{12}{27}, & x = 1 \\ \frac{6}{27}, & x = 2 \\ \frac{1}{27}, & x = 3 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{8}{27}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{20}{27}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{26}{27}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x \end{cases},$

b) $P(X \ge 1) = \frac{19}{27}$, c) $\mathrm{E}X = 1, \quad \mathrm{D}X = \frac{18}{27}$

$\square$

Příklad 4.7. Student má psát test, na který se nepřipravil, takže odpovědi formou ano/ne bude volit náhodně. Test se skládá z 20 otázek a pro úspěšné absolvování je třeba alespoň 15 správných odpovědí. Jaká je pravděpodobnost, že student test splní?

Řešení.
$\doteq 0{,}021$

$\square$

Příklad 4.8. Ve Sportce se z osudí obsahujícího 49 čísel losuje (bez vracení) 6 čísel. Sázející označí na svém lístku 6 čísel. Určete pravděpodobnost, že

a) uhodne všech 6 čísel,

b) nevyhraje (uhodne nejvýše 2 čísla).

Řešení.
a) $\doteq 7{,}151 \cdot 10^{-8}$, b) $\doteq 0{,}981$

$\square$

Příklad 4.9. Studenti chodí náhodně během vyučování na WC. Ze zkušenosti víme, že během jedné hodiny jdou na WC v průměru 2 studenti. Jaká je pravděpodobnost, že během 3hodinové přednášky půjde na záchod alespoň 1 student?

Řešení.
$\doteq 0{,}9975$

$\square$

Příklad 4.10. Náhodná veličina X má rozdělení dané funkcí

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}2, & x = 1, \\ 0{,}1, & x = 2, \\ 0{,}4, & x = 3, \\ 0{,}3, & x = 4, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) distribuční funkci náhodné veličiny X,

b) střední hodnotu náhodné veličiny X.

Řešení.

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}2, & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}3, & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}7, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}$, b) $\mathrm{E}X = 2{,}8$

$\square$

Příklad 4.11. Náhodná veličina X má rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \frac{x}{10}, \quad x \in 1, 2, 3, 4.$$

Určete

a) distribuční funkci náhodné veličiny X,

b) střední hodnotu náhodné veličiny $Y = 3X + 1$.

Řešení.

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}1, & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}3, & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}6, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}, \quad \text{b) } \mathrm{E}Y = 10$$

□

Příklad 4.12. Náhodná veličina X má rozdělení dané funkcí

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}1, & x = -1, \\ 0{,}4, & x = 0, \\ 0{,}3, & x = 1, \\ 0{,}2, & x = 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) distribuční funkci náhodné veličiny X,

b) střední hodnotu náhodné veličiny X^2.

Řešení.

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0{,}1, & -1 \leq x < 0 \\ 0{,}5, & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}8, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}, \quad \text{b) } \mathrm{E}(X^2) = 1{,}2$$

□

Příklad 4.13. Náhodná veličina X má rozdělení dané funkcí

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}4, & x = -2, \\ 0{,}2, & x = 0, \\ \text{c}, & x = 2, \\ 0{,}1, & x = 3, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) hodnotu parametru c,

b) distribuční funkci náhodné veličiny X,

c) pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty nejvýše 2.

Řešení.

a) $c = 0{,}3$ b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0{,}4, & -2 \le x < 0 \\ 0{,}6, & 0 \le x < 2 \\ 0{,}9, & 2 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x \end{cases}$, c) $P(X \le 2) = 0{,}9$

□

Příklad 4.14. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti dané funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 0{,}2, & -2 \le x < -1, \\ 0{,}3, & -1 \le x < 1, \\ 0{,}6, & 1 \le x < 3, \\ 1, & 3 \le x. \end{cases}$$

Určete

a) pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X,

b) rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení.

a) $p(x) = \begin{cases} 0{,}2, & x = -2 \\ 0{,}1, & x = -1 \\ 0{,}3, & x = 1 \\ 0{,}4, & x = 3 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$, b) $\mathrm{D}X = 3{,}8$

□

Příklad 4.15. Náhodná veličina X má rozdělení dané funkcí

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}5, & x = -2, \\ \mathrm{c}, & x = 0, \\ 0{,}1, & x = 1, \\ 0{,}2, & x = 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) hodnotu parametru c,

b) distribuční funkci náhodné veličiny X,

c) pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá nezáporných hodnot.

Řešení.

$$\text{a) } c = 0{,}2 \quad \text{b) } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0{,}5, & -2 \leq x < 0 \\ 0{,}7, & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}8, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}, \quad \text{c) } P(X \geq 0) = 0{,}5$$

□

Příklad 4.16. Náhodná veličina X má rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \frac{x}{6c}, \quad x \in 1, 2, 4, 5.$$

Určete

a) hodnotu parametru c,

b) distribuční funkci náhodné veličiny X,

c) střední hodnotu náhodné veličiny $Y = 2 - 2X$.

Řešení.

$$\text{a) } c = 2, \quad \text{b) } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{12}, & 2 \leq x < 4 \\ \frac{7}{12}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & 5 \leq x \end{cases}, \quad \text{c) } \mathrm{E}Y = -\tfrac{17}{3}$$

□

Příklad 4.17. Prodavač má 5 žárovek, z toho 2 jsou vadné. Před zákazníkem žárovky postupně zkouší, dokud nenajde dobrou žárovku. Vadné odkládá stranou. Náhodná veličina X udává, na kolikátý pokus se podařilo najít dobrou žárovku.

a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X a nakreslete její graf.

b) Určete pravděpodobnost, že se dobrá žárovka najde později než na první pokus.

c) Najděte distribuční funkci a nakreslete její graf.

d) Vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

e) Určete $P(X > \mathrm{E}X)$.

Řešení.
a) $p(1) = 0{,}6$; $p(2) = 0{,}3$; $p(3) = 0{,}1$; $p(x) = 0$ pro $x \notin \{1, 2, 3\}$; b) 0,4;

c) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 1) \\ 0{,}6 & \text{pro } x \in \langle 1, 2) \\ 0{,}9 & \text{pro } x \in \langle 2, 3) \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$ d) 1,5; 0,45, přibližně 0,671; e) 0,4

□

Příklad 4.18. Navazuje na předchozí příklad: Náhodná veličina Y udává, kolik vadných žárovek bylo vyzkoušeno, než se našla dobrá.

a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y.

b) Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y.

Řešení.
a) $p(0) = 0{,}6$; $p(1) = 0{,}3$; $p(2) = 0{,}1$; $p(x) = 0$ pro $x \notin \{0, 1, 2\}$; b) 0,5; 0,45

□

Příklad 4.19. Součástí přijímacích zkoušek je test, který se skládá ze 6 otázek, u každé jsou 3 možnosti odpovědi na výběr. Lojza u všech otázek odpovědi pouze tipuje. Náhodná veličina X udává, kolik odpovědí měl správně.

a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

b) Vypočtěte pravděpodobnost, že Lojza uhodne alespoň 3 odpovědi.

c) Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení.
a) $p(x) = \binom{6}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$ pro $x \in \{0, 1, \ldots, 6\}; p(x) = 0$ jinak
b) přibližně 0,320; c) 2; $\frac{4}{3}$

□

Příklad 4.20. Navazuje na předchozí příklad. Jana dělá podobný test, ale otázek je celkem 10. Z toho 4 umí a u zbytku si tipne. Za každou správnou odpověď dostane 5 bodů. Náhodná veličina Y udává, kolik bodů Jana získala z testu.

Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y.

Řešení.
30; $\frac{100}{3}$

□

Příklad 4.21. Náhodná veličina X je diskrétního typu a má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot 0{,}6^{x-1} & \text{pro } x = 1, 2, 3, \\ 0{,}216 & \text{pro } x = 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete hodnotu c.

b) Určete hodnoty $F(2), F(3{,}5)$ a $F(10)$.

c) (na hraní) Vymyslete situaci, kterou by X mohlo popisovat (tip: $0{,}216 = 0{,}6^3$).

Řešení.
a) 0,4; b) 0,64; 0,784; 1

□

Příklad 4.22. Náhodná veličina X popisující počet bodů, který náhodně vybraný student dostal na písemku, má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ 0{,}1 & \text{pro } x \in \langle 0, 1), \\ 0{,}2 & \text{pro } x \in \langle 1, 2), \\ 0{,}35 & \text{pro } x \in \langle 2, 3), \\ 0{,}65 & \text{pro } x \in \langle 3, 4), \\ 0{,}9 & \text{pro } x \in \langle 4, 5), \\ 1 & \text{pro } x \geq 5. \end{cases}$$

a) Jaká je pravděpodobnost, náhodně vybraný student získal nanejvýš 3 body?

b) Jaká je pravděpodobnost, náhodně vybraný student získal více než 2 body?

c) Jaká je pravděpodobnost, že získal právě 3 body?

d) Jaká je pravděpodobnost, že získal 1 až 4 body?

e) Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X.

Řešení.
a) 0,65; b) 0,65; c) 0,3; d) 0,8 e) 2,8

□

Příklad 4.23. Diskrétní náhodná veličina X má obor hodnot $\{2, 5, 7, 10\}$. Hodnoty její pravděpodobnostní funkce jsou v tabulce:

x	2	5	7	10
$p(x)$	0,25	$a =?$	$b =?$	0,35

Určete a a b, víme-li, že střední hodnota náhodné veličiny X je 6,2.

Řešení.
$a = 0{,}3, b = 0{,}1$

□

Příklad 4.24. V regálu je 8 žárovek, z toho 3 jsou vadné. Zákazník si koupí 4 žárovky.

a) Jaká je pravděpodobnost, že z koupených 4 bude právě 1 vadná?

b) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X udávající počet vadných žárovek mezi 4 koupenými.

c) Najděte střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny.

d) Najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y udávající počet dobrých žárovek mezi 4 koupenými.

Řešení.
a) $\frac{3}{7}$; b) $p(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{5}{4-x}}{\binom{8}{4}}$ pro $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, $p(x) = 0$ jinak
c) 1,5; $\frac{15}{28} \doteq 0{,}536$; d) 2,5; $\frac{15}{28} \doteq 0{,}536$

□

Příklad 4.25. V určitou denní dobu na parkoviště před domem přijíždí průměrně jedno auto za 5 minut. Pravděpodobnost, že by někdo naopak odjel, je zanedbatelná. Zbývají poslední 4 místa. Chci přeparkovat ze vzdálenějšího parkoviště a vím, že cesta pro auto a jízda před dům mi zaberou čtvrt hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že najdu před domem volné místo?

Řešení.
$13\mathrm{e}^{-3} \doteq 0{,}647$

□

Příklad 4.26. (Na hraní, pro zájemce) U přijímacích zkoušek je test, který se skládá z 20 otázek, u každé je 5 možností na výběr. Za každou správnou odpověď uchazeč dostane 60 bodů. Za každou špatnou odpověď se mu b bodů odečte. Určete b tak, aby střední hodnota bodového zisku u uchazeče, který všech 20 otázek vyplní náhodně, byla nulová.

Řešení.
15

□

4.2 Spojitá náhodná veličina

Příklad 4.27. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le 3, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete hodnotu parametru c.

b) Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

c) Určete střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

d) Určete $P(X < \frac{1}{3})$, $P(X > \frac{5}{2})$ a $P(-\frac{1}{4} < X \le 2)$.

Řešení.

a) $c = \frac{2}{9}$, b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 \le x \le 3, \\ 1, & 3 < x \end{cases}$ c) $\mathrm{E}X = 2$, $\mathrm{D}X = \frac{1}{2}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

d) $P(X < \frac{1}{3}) = \frac{1}{81}$, $P(X > \frac{5}{2}) = \frac{11}{36}$, $P(-\frac{1}{4} < X \le 2) = \frac{4}{9}$

□

Příklad 4.28. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x-1}{4}, & 1 < x < 5 \\ 1, & 5 \le x \end{cases}$$

a) Určete hustotu náhodné veličiny X.

b) Určete $P(X = 3)$ a $P(1 \le X \le 6)$.

Řešení.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 < x < 5, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$, b) $P(X = 3) = 0$, $P(1 \le X \le 6) = 1$

□

Příklad 4.29. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete hodnotu parametru c.

b) Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

c) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení.

a) $c = 12$, b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 4x^3 - 3x^4, & 0 < x < 1\,, \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$ c) $\mathrm{E}X = \frac{3}{5}$, $\mathrm{D}X = \frac{1}{25}$

□

Příklad 4.30. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \leq x \leq 3, \\ -\frac{1}{2}(x-4), & 3 < x \leq 4, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

b) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

c) Určete $P(X < \mathrm{E}X)$, $P(X > \mathrm{E}X + 1)$ a $P(X > 2\mathrm{E}X)$.

Řešení.

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{12}, & 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{4}(x^2 - 8x + 12), & 3 < x \leq 4 \\ 1, & 4 < x \end{cases}$, b) $\mathrm{E}X = \frac{7}{3}$, $\mathrm{D}X = \frac{13}{18}$,

c) $P(X < \mathrm{E}X) = \frac{49}{108}$, $P(X > \mathrm{E}X + 1) = \frac{1}{9}$, $P(X > 2\mathrm{E}X) = 0$

□

Příklad 4.31. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Určete distribuční funkci $F(x)$.

Řešení.

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

□

Příklad 4.32. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Určete distribuční funkci $F(x)$.

Řešení.
$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg}(x)}{\pi}$

□

Příklad 4.33. K přerušení optického kabelu délky 500 m může dojít v libovolné vzdálenosti od jeho počátku. Pravděpodobnost toho, že dojde k přerušení kabelu na daném úseku je přímo úměrná délce úseku a nezávisí na jeho poloze. Náhodná veličina X značí vzdálenost místa přerušení od počátku.

a) Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny X.

b) Určete pravděpodobnost, že dojde k přerušení kabelu v úseku od 300 m do 400 m.

Řešení.
a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{500}, & 0 < x < 500 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{500}, & 0 < x < 500, \\ 1, & 500 \leq x \end{cases}$

b) $P(300 \leq X \leq 400) = \frac{1}{5}$

□

Příklad 4.34. V restauraci natočí v průměru 2 piva za minutu. Po příchodu si objednáte pivo. Náhodná veličina X značí dobu čekání na pivo v minutách a má exponenciální rozdělení.

a) Určete pravděpodobnost, že budete čekat na pivo nejvýše 40 vteřin.

b) Jak dlouho budete muset nejdéle čekat, abyste měli 90% jistotu, že dostanete pivo?

Řešení.
a) $\doteq 0{,}736$, b) $\doteq 1{,}15$ minut

□

Příklad 4.35. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 1, \\ \frac{x}{12}, & 1 \leq x < 3, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

Řešení.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}, & -1 < x < 1, \\ \frac{x^2}{24} + \frac{5}{8}, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$$

□

Příklad 4.36. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5, & 0 < x < 1, \\ \frac{x}{3}, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

Řešení.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0{,}5x, & 0 < x < 1, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

□

Příklad 4.37. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0, \\ \frac{x}{4} + \frac{3}{8}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

Řešení.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{x^2}{8} + \frac{3x}{8} + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

□

Příklad 4.38. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x < 1, \\ \frac{x}{5}, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) hodnotu parametru c,

b) distribuční funkci náhodné veličiny X.

Řešení.

a) $c = 0{,}7$, b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0{,}7x, & 0 < x < 1, \\ \frac{x^2}{10} + 0{,}6, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$

□

Příklad 4.39. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

Řešení.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 < x < 1, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

□

Příklad 4.40. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 0 < x < 2, \\ \text{c}, & 2 \leq x < 3, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) hodnotu parametru c,

b) distribuční funkci náhodné veličiny X.

Řešení.

a) $c = 0{,}5$, b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{8}, & 0 < x < 2, \\ 0{,}5x - 0{,}5, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$

□

Příklad 4.41. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 1, \\ \frac{x}{4} - \frac{1}{8}, & 1 \leq x < 3, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

Řešení.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x < 1, \\ \frac{x^2}{8} - \frac{x}{8} + \frac{1}{4}, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$$

□

Příklad 4.42. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{x^2}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

Řešení.

$\frac{5}{48}$

□

Příklad 4.43. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} cx^3(1-x) & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete hodnotu konstanty c.

b) Vypočítejte $P(0{,}4 \leq X \leq 0{,}8)$, $P(X > 0{,}5)$, $P(X = 0{,}5)$.

c) Najděte distribuční funkci.

d) Pravděpodobnosti z části b) vypočtěte pomocí distribuční funkce.

e) Vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

Řešení.

a) 20; b) $\frac{2032}{3125} \doteq 0{,}650$; $\frac{13}{16} = 0{,}8125$; 0;

c) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 5x^4 - 4x^5 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & \text{pro } x > 1 \end{cases}$; d) viz b); e) $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{63}$; přibližně 0,178

□

Příklad 4.44. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-1) & \text{pro } x \in \langle 1, 3\rangle, \\ \frac{2}{3}(4-x) & \text{pro } x \in \langle 3, 4\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Najděte distribuční funkci a načrtněte její graf.

b) Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X.

c) Vypočtěte $P(X > \mathrm{E}X)$.

d) Najděte medián náhodné veličiny X.

Řešení.

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{6}(x-1)^2 & \text{pro } x \in \langle 1, 3\rangle \\ \frac{1}{3}(-x^2 + 8x - 13) & \text{pro } x \in (3, 4\rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (4, \infty) \end{cases}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $\frac{29}{54}$; d) $1 + \sqrt{3} \doteq 2{,}732$

□

Příklad 4.45. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{9}{x^2} & \text{pro } x \geq 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Načrtněte graf funkce F.

b) Vypočtěte $P(X < 4)$, $P(X = 4)$ a $P(4 \leq X \leq 5)$.

c) Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

d) Najděte 0,99-kvantil náhodné veličiny X.

Řešení.

b) $\frac{7}{16}$; 0; $\frac{81}{400}$; c) 6; ∞; d) 30

□

Příklad 4.46. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1, \\ c(1 + (x-2)^3) & \text{pro } x \in \langle 1, 3 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 3. \end{cases}$$

a) Určete hodnotu konstanty c a načrtněte graf funkce F.

b) Vypočtěte $P(X > 2{,}5)$.

c) Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X.

d) Najděte medián náhodné veličiny X.

Řešení.
a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{7}{16}$; c) 2; d) 2

□

Příklad 4.47. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle, \\ b & \text{pro } x \in \langle 3, 5 \rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete hodnoty konstant a, b, jestliže víme, že $\mathrm{E}X = 2{,}5$.

b) Najděte distribuční funkci náhodné veličiny X a načrtněte její graf.

Řešení.

a) $a = 0{,}6,\ b = 0{,}2$; b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 1) \\ 0{,}6(x-1) & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0{,}6 & \text{pro } x \in (2, 3 \rangle \\ 0{,}2x & \text{pro } x \in (3, 5 \rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (5, \infty) \end{cases}$

□

Příklad 4.48. Iva jede výtahem páternoster. Výtah jede konstantní rychlostí. Vzdálenost mezi podlahou jednotlivých podlaží je 4 m. Výtah se může zaseknout se stejnou pravděpodobností ve kterémkoli místě. Když se zasekne, Iva je schopná z něho vylézt, pokud je podlaha výtahu nanejvýš 1 m nad zemí (z větší výšky se bojí skočit) nebo pokud je nanejvýš 75 cm pod úrovní podlahy (výš nevyleze). Jaká je pravděpodobnost, že kdyby se výtah zasekl, bude to v poloze, ze které je Iva schopná se dostat? (Předpokládejme, že nasedá i vysedá, když je podlaha výtahu na úrovni podlahy patra.)

Řešení.

$\frac{7}{16}$

□

Příklad 4.49. Na hraní pro zájemce, složitější (a trochu realističtější) varianta předchozího příkladu: Iva chce jet z přízemí do pátého patra. Do výtahu nasedá, když je podlaha výtahu 25 cm nad zemí, a vysedá, když je podlaha výtahu 25 cm pod úrovní podlahy. Jinak řešíme stejný úkol jako v předchozím příkladu.

Řešení.

$\frac{11}{26}$

□

Příklad 4.50. Výtah páternoster se zasekne průměrně jednou za 60 hodin provozu. Náhodná veličina X, která udává, za jak dlouho se výtah zasekne, měřeno v hodinách, má exponenciální rozdělení.

a) Vypočtěte pravděpodobnost, že se výtah zasekne dřív než za 12 hodin.

b) Vypočtěte pravděpodobnost, že se výtah zasekne později než za 20 hodin.

c) Do jaké doby se výtah zasekne s pravděpodobností 0,9?

d) Na jak dlouho může obsluha výtahu odejít, aby pravděpodobnost, že se za tu dobu výtah nezasekne, byla 0,9?

e) Jaká je pravděpodobnost, že se během 30 hodin provozu výtah zasekne víc než dvakrát?

Řešení.

přibližně a) 0,181; b) 0,717; c) 138,16 hod; d) 6,32 hod; e) 0,0144

□

Příklad 4.51. Pro zájemce: Náhodně nezávisle na sobě vygenerujeme čísla a a b z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ (všechna čísla mohou vyjít se stejnou pravděpodobností). Náhodná veličina X udává vzdálenost bodu $[a, b]$ od hranice čtverce $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Najděte hustotu náhodné veličiny X a určete EX.

Řešení.

$f(x) = 4 - 8x$ pro $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$; $f(x) = 0$ jinak; $\mathrm{E}X = \frac{1}{6}$

□

Příklad 4.52. Pro zájemce: Jako předchozí příklad, ale zkoumáme náhodnou veličinu Y udávající vzdálenost bodu $[a, b]$ od středu čtverce $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Najděte její hustotu.

Řešení.

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi x & \text{pro } x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \\ 2\pi x - 8x \arccos \frac{1}{2x} & \text{pro } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

□

4.3 Normální rozdělení

Příklad 4.53. Náhodná veličina X udávající spotřebu vína v litrech na osobu za rok má normální rozdělení se střední hodnotou 20 a směrodatnou odchylkou 4. Určete pravděpodobnost, že spotřeba vína bude

a) menší než 16 litrů,

b) větší než 20 litrů,

c) v mezích od 12 do 28 litrů.

d) Pod jakou hranicí leží spotřeba vína u náhodně vybrané osoby s pravděpodobností 99 %?

Řešení.

a) $\doteq 0{,}1586$, b) 0,5, c) $\doteq 0{,}9545$, d) $\doteq 29{,}32$

□

Příklad 4.54. Bodový zisk z písemky je náhodná veličina, která má normální rozdělení se střední hodnotou 12 a rozptylem σ^2. Dále víme, že je 20% pravděpodobnost, že bodový zisk je větší než 15. Určete σ^2.

Řešení.

$\doteq 12{,}7551$

□

Příklad 4.55. Na obráběcím stroji se sleduje délka pracovní operace, která má normální rozdělení se střední hodnotou 21 minut a směrodatnou odchylkou 1,3 minuty.

a) Jaká je pravděpodobnost, že na náhodně vybraném stroji nepřekročí pracovní operace 20 minut?

b) S jakou pravděpodobností bude při obrábění 10 obrobků stačit celková doba 200 minut?

Řešení.
a) $\doteq 0{,}221$, b) $\doteq 0{,}0076$

$\square$

Příklad 4.56. Výška postavy u dívek ve věku 10 let má normální rozdělení se střední hodnotou 141 cm a rozptylem 16 cm. Uvažujme ročník ZŠ, ve kterém je 14 dívek. Jaká je pravděpodobnost, že

a) náhodně vybraná dívka je vyšší než 140 cm,

b) průměrná výška dívek v ročníku překročí 140 cm?

Řešení.
a) $\doteq 0{,}599$, b) $\doteq 0{,}826$

$\square$

Příklad 4.57. Továrna vyrábí nanuky. Délka nanuku je náhodná veličina, která má normální rozdělení se střední hodnotou 7,5 cm a směrodatnou odchylkou 4 mm. Víme, že kontrolou kvality projdou pouze nanuky delší než 7,3 cm.

a) Jaká je pravděpodobnost, že zakoupený nanuk bude delší než 8,2 cm?

b) Pokud bychom zrušili kontrolu kvality, pod jakou hranicí by ležela délka nanuku s pravděpodobností 5 %?

Řešení.
a) $\doteq 0{,}0579$, b) $\doteq 6{,}84$ cm

$\square$

Příklad 4.58. Životnost zářivky (v tisících hodin) je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 12 a rozptylem 144. Určete pravděpodobnost, že průměrná životnost zářivek v dodávce 100 kusů překročí 13 tisíc hodin.

Řešení.
$\doteq 0{,}203$

$\square$

Příklad 4.59. Student si před písemkou z IPT zakoupí půllitrovou plechovku energeťáku značky Mmm. Výrobce uvádí, že množství energeťáku v plechovce má normální rozdělení se střední hodnotou 500 ml a směrodatnou odchylkou 10 ml. Určete pravděpodobnost, že studentem zakoupená plechovka obsahuje alespoň 97 % předepsané hodnoty.

Řešení.

$\doteq 0{,}933$

□

Příklad 4.60. Student si před písemkou z IPT zakoupí stogramovou tabulku čokolády značky Mňam. Výrobce uvádí, že hmotnost tabulky čokolády má normální rozdělení se střední hodnotou 100 g a rozptylem 25 g^2. Určete, pod jakou hranicí bude ležet hmotnost studentem zakoupené tabulky čokolády s pravděpodobností 99 %.

Řešení.

$\doteq 111{,}65$

□

Příklad 4.61. Po úspěšném složení zkoušky z IPT se parta 6 kamarádů domluvila, že to oslaví. Rozhodli se, že se složí na párty drink za 1890 Kč. Příspěvek každého z nich do společné kasy je náhodná veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou 350 Kč a rozptylem 10 000 Kč^2. Jaká je pravděpodobnost, že vyberou požadovanou částku?

Řešení.

$\doteq 0{,}805$

□

Příklad 4.62. Studenti IPT pracovali celý semestr na úkolech. V zápočtovém týdnu bylo zjištěno, že počet bodů z úkolů má normální rozdělení se střední hodnotou 5 a rozptylem 1,44. Určete, nad jakou hranicí bude ležet bodový zisk náhodného studenta s pravděpodobností 90 %.

Řešení.

$\doteq 3{,}464$

□

Příklad 4.63. Eva a Miloš se domluvili, že budou online úkol do IPT vypracovávat společně. Úkol se skládá ze dvou částí, přičemž jednotlivé části na sebe navazují. Eva bude pracovat na první části a Miloš na druhé části. Na vypracování a odevzdání úkolu mají celkem 30 minut. Domluvili se, že posledních 10 minut z časového limitu si nechají na opsání řešení od sebe, vyfocení a nahrání řešení do systému. Jelikož se vždy učí spolu, čas potřebný k vypracování jedné části úkolu má u každého z nich normální rozdělení se střední hodnotou 9 minut a směrodatnou odchylkou 2 minuty. Určete pravděpodobnost, že Eva a Miloš zvládnou úkol vypracovat v termínu.

Řešení.

$\doteq 0{,}761$

□

Příklad 4.64. Čas potřebný k vyřešení úkolu do IPT, který právě čtete, má normální rozdělení se střední hodnotou 12 minut a rozptylem 25 minut^2. Ve skupině je vás 49. Určete pravděpodobnost, že průměrná doba potřebná k vyřešení úkolu nepřesáhne ve Vaší skupině 10 minut.

Řešení.

$\doteq 0{,}0026$

□

Příklad 4.65. Spotřeba čokolády u studentů ve zkouškovém období s postupujícím časem narůstá a lze ji popsat spojitým rozdělením pravděpodobnosti se střední hodnotou 3 kg a směrodatnou odchylkou 2 kg. Ve cvičení jste spolu s dalšími 49 studenty. Určete pravděpodobnost, že průměrná spotřeba čokolády ve Vaší skupině přesáhne 3,5 kg.

Řešení.

$\doteq 0{,}038$

□

Příklad 4.66. Na pile řežou střešní latě. Délka latě je náhodná veličina X s normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 300$ cm a rozptylem $\sigma^2 = 16$ cm^2.

Jaká je pravděpodobnost, že

a) lať bude kratší než 305 cm,

b) lať bude delší než 310 cm,

c) délka latě zaokrouhlená na centimetry bude 300 cm,

d) délka latě se bude od 300 cm lišit o více než 5 cm?

Řešení.

přibližně a) 0,894; b) 0,006; c) 0,100; d) 0,212

□

Příklad 4.67. Náhodná veličina X popisující denní počet výrobků jisté dílny má přibližně normální rozdělení se střední hodnotou 500 kusů a směrodatnou odchylkou 10 kusů.

a) Jaká je pravděpodobnost, že počet výrobků bude v rozmezí 480 až 510 kusů?

b) Nad jakou hodnotu se počet výrobků dostane jen s pravděpodobností 10 %?

c) V jakých mezích souměrných kolem střední hodnoty bude počet výrobků s pravděpodobností 90 %?

Řešení.
přibližně a) 0,819; b) 513; c) $\langle 484, 516\rangle$

□

Příklad 4.68. Na tabulce čokolády je uvedená hmotnost 90 g. Ve skutečnosti je hmotnost tabulky náhodná veličina X se střední hodnotou $\mu = 88$ g a rozptylem 10 g^2.

a) Přípustná záporná hmotnostní odchylka u tohoto typu zboží je 5 %. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná tabulka čokolády bude v normě?

b) Kdyby rozptyl zůstal 10 g^2, jak by se musela změnit střední hodnota, aby pravděpodobnost, že výrobek bude v normě, byla 95 %?

c) Kdyby střední hodnota zůstala 88 g, jak by se musel změnit rozptyl, aby pravděpodobnost, že výrobek bude v normě, byla 95 %?

Řešení.
přibližně a) 0,785; b) 90,70 g; c) 2,31 g^2

□

Příklad 4.69. Doba potřebná na opravu jedné písemky je náhodná veličina X s normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 5$ minut a rozptylem $\sigma^2 = 1$ minuta^2. Zbývá mi posledních 10 písemek.

a) Jaká je pravděpodobnost, že je stihnu opravit dřív než za tři čtvrtě hodiny?

b) Do kdy je stihnu opravit s pravděpodobností 0,99?

Řešení.
přibližně a) 0,057; b) $57, 37$ min

□

Příklad 4.70. Množství soli ve stogramovém balíčku kořenicí směsi je náhodná veličina X s normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 40$ gramů a $\sigma^2 = 5$ g^2. Náhodně, nezávisle na sobě vybereme 2 balíčky.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v prvním vybraném balíčku je více než 42 gramů soli?

b) Jaká je pravděpodobnost, že průměrné množství soli ve dvou balíčcích bude vyšší než 42 g?

   Dříve, než budeme počítat: V jakém vztahu bude tato pravděpodobnost k výsledku části a)? Větší, menší, stejná?

c) V jakých mezích souměrných kolem μ bude průměrné množství soli ve dvou balíčcích s pravděpodobností 99 %?

d) Jaká je pravděpodobnost, že v obou balíčcích bude více než 42 gramů soli?

Dříve, než budeme počítat: V jakém vztahu bude tato pravděpodobnost k výsledku části b)? Větší, menší, stejná?

e) Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom ze dvou balíčků bude více než 42 gramů soli?

Opět: V jakém vztahu bude výsledek k výsledku b)?

Řešení.

přibližně a) 0,187; b) 0,104 ; c) $\langle 35{,}92;\ 44{,}08\rangle$ g; d) 0,035; e) 0,339

□

Příklad 4.71. Tramvaj jezdí v dvanáctiminutových intervalech a paní Berličková chodí na zastávku každý den náhodně.

Náhodná veličina X udává, jak dlouho bude čekat na tramvaj (v minutách).

Náhodná veličina $\overline{X}$ udává průměrnou dobu čekání za 48 dní.

Určete pravděpodobnost, že průměrná doba čekání bude kratší než 7 minut.

Řešení.

přibližně 0,977

□

Příklad 4.72. Pan Záhada tvrdí, že je senzibil a že dokáže rozeznat, jestli je v neprůhledné krabici živý nebo neživý objekt. Je ochoten předstoupit před Český klub skeptiků Sisyfos a nechat se přezkoušet: Postupně dostane 100 krabic a bude mít za úkol je rozlišit.

a) Pan Záhada je podvodník nebo blázen a žádné zvláštní schopnosti nemá.
(Platí i pro část b).)
Jaká je pravděpodobnost, že správně rozliší alespoň 75 krabic?

b) Nad jakou hranici se počet uhodnutých krabic dostane jen s pravděpodobností 5 %?

c) Pan Záhada je opravdu senzibil a pravděpodobnost správného rozlišení je u každé krabice 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že počet uhodnutých krabic bude nad hranicí stanovenou v části b)?

Řešení.

přibližně a) $3 \cdot 10^{-7}$; b) 58; c) 0,9999997

□

Příklad 4.73.

(Na hraní, k zamyšlení) Už víme, že součet dvou náhodných veličin s normálním rozdělením má také normální rozdělení. Jak je to s jinými rozděleními?

- Diskrétní rovnoměrné: Hážu kostkou, $X_1 \dots$ co padlo v prvním hodu, $X_2 \dots$ co padlo ve druhém hodu. Má $X_1 + X_2$ také rovnoměrné rozdělení?
- Binomické: $X_1 \dots$ kolikrát padla šestka v 10 hodech kostkou, $X_2 \dots$ kolikrát padla šestka v dalších 5 hodech. Má $X_1 + X_2$ také binomické rozdělení?
- Binomické znovu: $X_1 \dots$ kolikrát padla šestka v 10 hodech kostkou, $X_2 \dots$ kolikrát padlo sudé číslo v dalších 5 hodech. Má $X_1 + X_2$ také binomické rozdělení?
- Hypergeometrické: Máme dvě urny, v každé je 10 kuliček. V první je 5 bílých, ve druhé jsou 3 bílé. Z první urny náhodně vyberu 2 kuličky, $X_1 \dots$ kolik z nich je bílých. Ze druhé urny náhodně vybereme 3 kuličky, $X_2 \dots$ kolik z nich je bílých. Má $X_1 + X_2$ také hypergeometrické rozdělení?
- Hypergeometrické znovu: V urně je 10 kuliček, z toho 6 bílých. Náhodně vyberu 2 kuličky, $X_1 \dots$ kolik z nich je bílých. Ze zbytku náhodně vybereme 3 kuličky, $X_2 \dots$ kolik z nich je bílých. Má $X_1 + X_2$ také hypergeometrické rozdělení? (A má vůbec X_2 hypergeometrické rozdělení?)
- Poissonovo: Do obchodu přichází průměrně 10 zákazníků za hodinu. $X_1 \dots$ kolik zákazníků přišlo dopoledne, $X_2 \dots$ kolik zákazníků přišlo odpoledne. Má $X_1 + X_2$ také Poissonovo rozdělení?
- Na součet spojitých rozdělení zatím nemáte matematický aparát, ale můžete popřemýšlet třeba o rovnoměrném spojitém – je součet dvou rovnoměrných zase rovnoměrné?

4.4 Transformace náhodných veličin

Příklad 4.74. Náhodná veličina X má rozdělení určené pravděpodobnostní funkcí, která je zadána tabulkou:

x	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny

a) $Y = 1 - X$,

b) $Z = X^2$.

Řešení.

a)

y	2	1	0	-1	-2
$p_Y(y)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

b)

z	0	1	4	9
$p_Z(z)$	0,2	0,5	0,2	0,1

□

Příklad 4.75. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení Exp(1). Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny

a) $Y = 2X + 1$,

b) $Y = \sqrt{X}$,

c) $Y = X^2$.

Řešení.

a) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1-y}{2}}, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{\frac{1-y}{2}}, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$

b) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y\mathrm{e}^{-y^2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y^2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

c) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

□

Příklad 4.76. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu (0,4). Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny

a) $Y = -\ln(X)$,

b) $Y = \frac{1}{X}$,

c) $Y = \mathrm{e}^{-X}$.

Řešení.

a) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{4}, & y > -\ln(4) \\ 0, & y \leq -\ln(4) \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{\mathrm{e}^{-y}}{4}, & y > -\ln(4) \\ 0, & y \leq -\ln(4) \end{cases}$

b) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4y^2}, & y > \frac{1}{4} \\ 0, & y \leq \frac{1}{4} \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4y}, & y > \frac{1}{4} \\ 0, & y \leq \frac{1}{4} \end{cases}$

c) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4y}, & \frac{1}{\mathrm{e}^4} < y < 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \frac{1}{\mathrm{e}^4} \\ 1 + \frac{\ln(y)}{4}, & \frac{1}{\mathrm{e}^4} < y < 1 \\ 1, & 1 \leq y \end{cases}$

□

Příklad 4.77. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu (1,3). Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = X^2$.

Řešení.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, & 1 < y < 9 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \frac{\sqrt{y}-1}{2}, & 1 < y < 9 \\ 1, & 9 \le y \end{cases}$$

□

Příklad 4.78. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu (2,5). Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = 2\sqrt{X}$.

Řešení.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{6}, & 2\sqrt{2} < y < 2\sqrt{5} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 2\sqrt{2} \\ \frac{y^2-8}{12}, & 2\sqrt{2} < y < 2\sqrt{5} \\ 1, & 2\sqrt{5} \le y \end{cases}$$

□

Příklad 4.79. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu (1,4). Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = -\ln(2X - 1)$.

Řešení.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{6}, & -\ln(7) < y < 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le -\ln(7) \\ \frac{7}{6} - \frac{\mathrm{e}^{-y}}{6}, & -\ln(7) < y < 0 \\ 1, & 0 \le y \end{cases}$$

□

Příklad 4.80. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení Exp(2). Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = \sqrt[3]{X}$.

Řešení.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6y^2\mathrm{e}^{-2y^3}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2y^3}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

□

Příklad 4.81. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 2. Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = 1 + \sqrt{X}$.

Řešení.

$$f_Y(y) = \begin{cases} (y-1)\mathrm{e}^{-0,5(y-1)^2}, & y > 1 \\ 0, & y \le 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0,5(y-1)^2}, & y > 1 \\ 0, & y \le 1 \end{cases}$$

□

Příklad 4.82. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu (-1,1). Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = \sqrt[5]{X}$.

Řešení.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{2}y^4, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -1 \\ \frac{y^5+1}{2}, & -1 < y < 1 \\ 1, & 1 \leq y \end{cases}$$

□

Příklad 4.83. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu (-2,1). Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = X^3 + 1$.

Řešení.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9\sqrt[3]{(y-1)^2}}, & -7 < y < 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -7 \\ \frac{\sqrt[3]{y-1}+2}{3}, & -7 < y < 2 \\ 1, & 2 \leq y \end{cases}$$

□

Příklad 4.84. Karel hraje hru, ve které musí do dvou minut splnit určitý úkol. Pravděpodobnost, že se mu to podaří, je při každé hře nezávisle na ostatních 0,8. Je odhodlaný hru opakovaně zkoušet tak dlouho, dokud se mu úkol nepodaří splnit.

Náhodná veličina X udává, na kolikátý pokus se mu podařilo úkol splnit.

Náhodná veličina Y udává, kolik času (v minutách) celkem strávil neúspěšnými pokusy.

a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

b) Vyjádřete Y pomocí X.

c) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y.

d) Pro zájemce: Najděte distribuční funkci náhodných veličin X a Y (funkční předpis v uzavřeném tvaru).

Řešení.

a) $p_X(x) = 0{,}2^{x-1} \cdot 0{,}8$, $x = 1, 2, 3, \ldots$; b) $Y = 2(X - 1)$; c) $p_Y(y) = 0{,}2^{y/2} \cdot 0{,}8$, $y = 0, 2, 4, \ldots$

□

Příklad 4.85. Náhodná veličina X je diskrétního typu a má pravděpodobnostní funkci

x	-2	0	1
$p_X(x)$	0,2	0,7	0,1

Najděte pravděpodobnostní funkci a střední hodnotu náhodné veličiny $Y = (X + 1)^2$.

Řešení.
$p_Y(1) = 0{,}9,\ p_Y(4) = 0{,}1,\ p_Y(y) = 0$ pro $y \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$; $\mathrm{E}(Y) = 1{,}3$

□

Příklad 4.86. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

a) Najděte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = \ln X$.

b) Vypočtěte $\mathrm{E}(Y)$.

Řešení.
a) $F_Y(y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2y}, & y \in (-\infty, 0\rangle \\ 1, & y \in (0, \infty) \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{2y}, & y \in (-\infty, 0\rangle \\ 0, & y \in (0, \infty) \end{cases}$; $\quad$ b) $\mathrm{E}(Y) = -\frac{1}{2}$

□

Příklad 4.87. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x^3 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Najděte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = 2 - X$.
Načrtněte grafy funkcí f_X a f_Y.

Řešení.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1 - (2-y)^3, & y \in \langle 1, 2\rangle \\ 1, & y > 2 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 3(2-y)^2 & y \in \langle 1, 2\rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

□

Příklad 4.88. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Najděte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Řešení.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}, & y \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \\ 1, & y > 1 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{2}{y^2} + \frac{2}{y^3} & y \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

□

Příklad 4.89. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -2, \\ \frac{1}{16}(x+2)^2 & \text{pro } x \in \langle -2, 2 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 2. \end{cases}$$

Najděte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$.

Řešení.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{y}, & y \in \langle 0, 4 \rangle \\ 1, & y > 4 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & y \in (0, 4\rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

□

Příklad 4.90. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1, \\ \frac{1}{4}(x+1)^2 & \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Najděte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = |X|$.

Řešení.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & y \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1, & y > 1 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

□

Příklad 4.91. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{24}{x^4} & \text{pro } x \geq 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = \frac{1}{X}$.

Řešení.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 8y^3, & y \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ 1, & y > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 24y^2 & y \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

□

Příklad 4.92. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{32}{x^3} & \text{pro } x \geq 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = \sqrt{X}$.

Řešení.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2 \\ 1 - \frac{16}{y^4}, & y \geq 2 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{64}{y^5} & y \geq 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

□

Příklad 4.93. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Najděte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = \operatorname{tg} X$.

Řešení.

$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y,\ y \in \mathbb{R} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)},\ y \in \mathbb{R}$

□

Příklad 4.94. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Najděte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = |X|$.

Řešení.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} y, & y \geq 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{2}{\pi(1+y^2)} & y \geq 0 \end{cases}$$

□

Příklad 4.95. Náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.
Najděte hustotu náhodných veličin $Y = \mathrm{e}^X$ a $Z = Y^2$.

Řešení.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}, \quad Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2), \text{ tzv. lognormální rozdělení}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}2\sigma z} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln z - 2\mu)^2}{8\sigma^2}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}, \quad Z \sim \mathrm{LN}(2\mu, (2\sigma)^2)$$

$\square$

5 Náhodný vektor

5.1 Diskrétní náhodný vektor

Příklad 5.1. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x,y)$, která je zadána tabulkou:

$y \backslash x$	0	1	3
-1	0,1	0,2	0,1
1	0,3	0,2	0,1

Určete

a) marginální pravděpodobnostní funkce,

b) zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé,

c) distribuční funkci náhodného vektoru $(X,Y)'$.

Řešení.

a)

$y \backslash x$	0	1	3	$p_Y(y)$
-1	0,1	0,2	0,1	0,4
1	0,3	0,2	0,1	0,6
$p_X(x)$	0,4	0,4	0,2	

, b) nejsou nezávislé,

c) $F(x,y)$:

$y \backslash x$	$(-\infty,0)$	$\langle 0,1)$	$\langle 1,3)$	$\langle 3,\infty)$
$(-\infty,-1)$	0	0	0	0
$\langle -1,1)$	0	0,1	0,3	0,4
$\langle 1,\infty)$	0	0,4	0,8	1

□

Příklad 5.2. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x,y)$, která je zadána tabulkou:

$y\backslash x$	-1	0	1
0	c	0	0
1	0	$2c$	$2c$
2	0	$3c$	$2c$

Určete

a) c,

b) marginální pravděpodobnostní funkce,

c) distribuční funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$,

d) podmíněné pravděpodobnostní funkce,

e) korelační koeficient mezi veličinami X, Y.

Řešení.

a) $c = 0{,}1$, b)

$y\backslash x$	-1	0	1	$p_Y(y)$
0	0,1	0	0	0,1
1	0	0,2	0,2	0,4
2	0	0,3	0,2	0,5
$p_X(x)$	0,1	0,5	0,4	

,

c) $F(x, y)$:

$y\backslash x$	$(-\infty, -1)$	$\langle -1, 0)$	$\langle 0, 1)$	$\langle 1, \infty)$
$(-\infty, 0)$	0	0	0	0
$\langle 0, 1)$	0	0,1	0,1	0,1
$\langle 1, 2)$	0	0,1	0,3	0,5
$\langle 2, \infty)$	0	0,1	0,6	1

,

d)

x	-1	0	1
$p(x\|0)$	1	0	0
$p(x\|1)$	0	0,5	0,5
$p(x\|2)$	0	0,6	0,4

,

y	0	1	2
$p(y\|-1)$	1	0	0
$p(y\|0)$	0	0,4	0,6
$p(y\|1)$	0	0,5	0,5

,

e) $\rho(X, Y) \doteq 0{,}424$

□

Příklad 5.3. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$, která je zadána tabulkou:

$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
2	0	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0

Určete

a) marginální pravděpodobnostní funkce,

b) zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé,

c) distribuční funkci náhodného vektoru $(X,Y)'$,

d) střední hodnoty a rozptyly veličin X, Y,

e) kovarianci a korelační koeficient mezi veličinami X, Y.

Řešení.

a)

$x\backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

, b) nejsou nezávislé,

c) $F(x,y)$:

$x\backslash y$	$(-\infty,0)$	$\langle 0,1)$	$\langle 1,2)$	$\langle 2,3)$	$\langle 3,\infty)$
$(-\infty,0)$	0	0	0	0	0
$\langle 0,1)$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
$\langle 1,2)$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
$\langle 2,3)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
$\langle 3,\infty)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

,

d) $\mathrm{E}X = \frac{7}{8}$, $\mathrm{D}X = \frac{71}{64}$, $\mathrm{E}Y = \frac{11}{8}$, $\mathrm{D}Y = \frac{47}{64}$,

e) $\mathrm{C}(X,Y) = -\frac{37}{64}$, $\rho(X,Y) \doteq -0{,}641$

□

Příklad 5.4. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má diskrétní rozdělení pravděpodobnostni. Náhodná veličina X značí známku z matematiky a náhodná veličina Y známku z fyziky. Ve studijní skupině byly zjištěny následující výsledky:

(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (2,3), (3,2), (3,2), (3,3), (3,3), (3,3), (3,3), (3,3), (3,4), (3,4), (4,3), (4,3), (4,4), (4,4), (4,4)

Určete

a) pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $(X,Y)'$,

b) zda jsou známky z matematiky a fyziky nezávislé náhodné veličiny,

c) marginální pravděpodobnostní funkce,

d) distribuční funkci náhodného vektoru $(X,Y)'$,

e) pravděpodobnost, že známka z matematiky je nejhůře dvojka a zároveň známka z fyziky je nejhůře trojka,

f) pravděpodobnost, že známka z matematiky je lepší než známka z fyziky.

Řešení.

a)

$x\backslash y$	1	2	3	4
1	0,05	0,05	0,05	0
2	0	0,05	0,1	0
3	0	0,1	0,25	0,1
4	0	0	0,1	0,15

, b) nejsou nezávislé,

c)

$x\backslash y$	1	2	3	4	$p_X(x)$
1	0,05	0,05	0,05	0	0,15
2	0	0,05	0,1	0	0,15
3	0	0,1	0,25	0,1	0,45
4	0	0	0,1	0,15	0,25
$p_Y(y)$	0,05	0,2	0,5	0,25	

d) $F(x,y)$:

$x\backslash y$	$(-\infty,1)$	$\langle 1,2)$	$\langle 2,3)$	$\langle 3,4)$	$\langle 4,\infty)$
$(-\infty,1)$	0	0	0	0	0
$\langle 1,2)$	0	0,05	0,1	0,15	0,15
$\langle 2,3)$	0	0,05	0,15	0,3	0,3
$\langle 3,4)$	0	0,05	0,25	0,65	0,75
$\langle 4,\infty)$	0	0,05	0,25	0,75	1

e) 0,3, f) 0,3

□

Příklad 5.5. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x,y)$, která je zadána tabulkou:

$x\backslash y$	-1	1	2	3
0	0	0,1	0	0,1
1	0,04	0,08	0,2	0
3	0,08	0,16	0,24	0

Určete $p(x|y)$ a $\mathrm{E}(XY)$.

Řešení.

x	0	1	3
$p(x\|-1)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p(x\|1)$	$\frac{5}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{8}{17}$
$p(x\|2)$	0	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$
$p(x\|3)$	1	0	0

, $\mathrm{E}(XY) = 2{,}12$

□

Příklad 5.6. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$, která je zadána tabulkou:

$x\backslash y$	-1	1	2
0	0,1	0,1	0,05
1	0,1	0,2	0,1
2	0,3	0,05	0

Určete korelační koeficient mezi veličinami X, Y.

Řešení.

$\doteq -0{,}3977$

□

Příklad 5.7. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$, která je zadána tabulkou:

$x\backslash y$	0	1	2
1	0,05	0	0,2
2	0,05	0,15	0,15
3	0,1	0,25	0,05

Určete $p_X(x)$ a $F(x, y)$.

Řešení.

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}25, & x = 1 \\ 0{,}35, & x = 2 \\ 0{,}4, & x = 3 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad F(x,y):$$

$x \backslash y$	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, 1)$	$\langle 1, 2)$	$\langle 2, \infty)$
$(-\infty, 1)$	0	0	0	0
$\langle 1, 2)$	0	0,05	0,05	0,25
$\langle 2, 3)$	0	0,1	0,25	0,6
$\langle 3, \infty)$	0	0,2	0,6	1

□

Příklad 5.8. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$, která je zadána tabulkou:

$y \backslash x$	0	2	3
-2	0	0,15	0,05
1	0,2	0,25	0,05
2	0,05	0,1	0,15

Určete $p(x|y)$ a $p(y|x)$.

Řešení.

x	0	2	3
$p(x\|-2)$	0	0,75	0,25
$p(x\|1)$	0,4	0,5	0,1
$p(x\|2)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

,

y	-2	1	2
$p(y\|0)$	0	0,8	0,2
$p(y\|2)$	0,3	0,5	0,2
$p(y\|3)$	0,2	0,2	0,6

□

Příklad 5.9. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$, která je zadána tabulkou:

$x \backslash y$	-1	0	1
0	$2c$	$3c$	$3c$
1	c	$4c$	c
2	$4c$	$2c$	$5c$

Určete c a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé.

Řešení.

$c = 0{,}04$, $\quad X$ a Y nejsou nezávislé

□

Příklad 5.10. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$, která je zadána tabulkou:

$y\backslash x$	-2	0	1	2
-1	$2c$	$4c$	0	$6c$
1	$3c$	c	$2c$	$2c$

Určete c a $F(x, y)$.

Řešení.

$c = 0{,}05, \quad F(x, y)$:

$x\backslash y$	$(-\infty, -2)$	$\langle -2, 0)$	$\langle 0, 1)$	$\langle 1, 2)$	$\langle 2, \infty)$
$(-\infty, -1)$	0	0	0	0	0
$\langle -1, 1)$	0	0,1	0,3	0,3	0,6
$\langle 1, \infty)$	0	0,25	0,5	0,6	1

□

Příklad 5.11. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$, která je zadána tabulkou:

$y\backslash x$	1	2
0	0,1	0,05
1	0,15	0
2	0,05	0,2
3	0,3	0,15

Určete rozptyl náhodné veličiny Y a kovarianci mezi veličinami X, Y.

Řešení.

$\mathrm{D}Y = 1{,}2, \quad \mathrm{C}(X, Y) = 0{,}05$

□

Příklad 5.12. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení dané tabulkou pravděpodobnostní funkce:

$x \backslash y$	1	3
0	0,3	0,1
2	0,1	0,2
4	0,2	0,1

a) Najděte marginální pravděpodobnostní funkce.

b) Najděte distribuční funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

c) Najděte marginální distribuční funkce.

d) Vypočtěte $P(X \geq 2Y)$.

Řešení.

a)

$x \backslash y$	1	3	$p_X(x)$
0	0,3	0,1	0,4
2	0,1	0,2	0,3
4	0,2	0,1	0,3
$p_Y(y)$	0,6	0,4	

b)

$x \backslash y$	$(-\infty, 1)$	$\langle 1, 3)$	$\langle 3, \infty)$
$(-\infty, 0)$	0	0	0
$\langle 0, 2)$	0	0,3	0,4
$\langle 2, 4)$	0	0,4	0,7
$\langle 4, \infty)$	0	0,6	1

c) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 0{,}4 & x \in \langle 0, 2) \\ 0{,}7 & x \in \langle 2, 4) \\ 1 & x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 1) \\ 0{,}6 & y \in \langle 1, 3) \\ 1 & y \in \langle 3, \infty) \end{cases}$ $\quad$ d) 0,3

□

Příklad 5.13. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, sdružená a marginální pravděpodobnostní funkce jsou v tabulce:

$x \backslash y$	0	2	3	$p_X(x)$
0	?	?	0,2	?
2	0,2	?	?	0,5
$p_Y(y)$	?	0,3	0,3	

a) Doplňte chybějící hodnoty v tabulce – vše zdůvodněte.

b) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé.

c) Vypočtěte kovarianci náhodných veličin X, Y.

d) Vypočtěte korelační koeficient náhodných veličin X, Y.

Řešení.

a)

$x \backslash y$	0	2	3	$p_X(x)$
0	0,2	0,1	0,2	0,5
2	0,2	0,2	0,1	0,5
$p_Y(y)$	0,4	0,3	0,3	

b) nejsou nezávislé; c) $-0{,}1$; d) přibližně $-0{,}078$

□

Příklad 5.14. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení dané tabulkou pravděpodobnostní funkce:

$x \backslash y$	1	2	3
0	0,1	0,1	0,2
1	0,3	0,2	0,1

Najděte podmíněná rozdělení pravděpodobnosti $p(x|y)$ a $p(y|x)$.

Řešení.

x	0	1
$p(x\|1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p(x\|2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p(x\|3)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

y	1	2	3
$p(y\|0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$p(y\|1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

□

Příklad 5.15. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení dané tabulkou pravděpodobnostní funkce:

$x \backslash y$	1	3
0	0,2	0,3
2	0,4	0,1

a) Vypočtěte $F(1, 3)$.

b) Vypočítejte korelační koeficient mezi náhodnými veličinami X, Y.

Řešení.

a) 0,5; b) přibližně $-0{,}408$

□

Příklad 5.16. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení dané tabulkou pravděpodobnostní funkce:

$x \backslash y$	1	2	3
1	0,2	0,1	0,2
2	0,2	0,2	0,1

a) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé - zdůvodněte!

b) Vypočtěte $P(X = Y)$.

c) Najděte distribuční funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

Řešení.

a) nejsou nezávislé; b) 0,4 c)

$x \backslash y$	$(-\infty, 1)$	$\langle 1, 2)$	$\langle 2, 3)$	$\langle 3, \infty)$
$(-\infty, 1)$	0	0	0	0
$\langle 1, 2)$	0	0,2	0,3	0,5
$\langle 2, \infty)$	0	0,4	0,7	1

□

Příklad 5.17. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má sdruženou pravděpodobnostní funkci danou tabulkou:

$x \backslash y$	0	1
0	0,16	0,04
1	0,16	0,24
2	a	b

Doplňte hodnoty a, b tak, aby náhodné veličiny X, Y byly nekorelované.
Pak rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé.

Řešení.
$a = 0{,}28,\ b = 0{,}12$, nejsou nezávislé

□

Příklad 5.18. Hodíme vyváženou hrací kostkou. Náhodná veličina X udává, zda padla šestka: $X = 1$, pokud ano; $X = 0$ pokud ne. Pak hodíme ještě jednou. Náhodná veličina Y udává, kolik padlo celkově šestek v těchto dvou hodech.

a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

b) Najděte podmíněná rozdělení pravděpodobnosti $p(y|x)$ a $p(x|y)$.

Řešení.

a)

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$	0
1	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

b)

y	0	1	2
$p(y\|0)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
$p(y\|1)$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

c)

x	0	1
$p(x\|0)$	1	0
$p(x\|1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$p(x\|2)$	0	1

□

Příklad 5.19. Xenie a Yvona spolu hrávají tenis. Pravděpodobnost, že vyhraje Xenie, je v každé hře nezávisle na ostatních 0,4. Nyní spolu hrály dvakrát.

Náhodná veličina X udává, kolikrát v těchto dvou zápasech vyhrála Xenie. Náhodná veličina Y udává, kolikrát vyhrála Yvona.

a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

b) Vypočtěte kovarianci a korelační koeficient náhodných veličin X, Y.

c) Sestavte (ko)varianční a korelační matici.

Řešení.

a)

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	0,36
1	0	0,48	0
2	0,16	0	0

b) $C(X, Y) = -0{,}48, \rho(X, Y) = -1$;

c) $\begin{pmatrix} 0{,}48 & -0{,}48 \\ -0{,}48 & 0{,}48 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

□

5.2 Spojitý náhodný vektor

Příklad 5.20. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle\,, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) marginální hustoty,

b) marginální distribuční funkce,

c) sdruženou distribuční funkci,

d) zda jsou veličiny X, Y nezávislé,

e) podmíněné hustoty,

f) střední hodnoty a rozptyly veličin X, Y,

g) korelační koeficient mezi veličinami X, Y.

Řešení.

a) $f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & x \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2}, & y \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases},$

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty;0) \\ \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}, & x \in \langle 0;1\rangle \\ 1, & x \in (1;\infty) \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty;0) \\ \frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}, & y \in \langle 0;1\rangle \\ 1, & y \in (1;\infty) \end{cases},$

c) $F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \\ \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times (1;\infty) \\ \frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}, & (x,y) \in (1;\infty) \times \langle 0;1\rangle \\ 1, & (x,y) \in (1;\infty) \times (1;\infty) \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases},$

d) nejsou nezávislé,

e) $f(x|y) = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}$, $(x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$, $\quad f(y|x) = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$, $(x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$

f) $\mathrm{E}X = \frac{7}{12}$, $\quad \mathrm{D}X = \frac{11}{144}$, $\quad \mathrm{E}Y = \frac{7}{12}$, $\quad \mathrm{D}Y = \frac{11}{144}$, $\quad$ g) $\rho(X,Y) = -\frac{1}{11}$

□

Příklad 5.21. Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)'$ má spojité rozdělení určené funkcí

$$f(x,y) = \begin{cases} c - x + y, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle\,, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) c,

b) marginální hustoty,

c) marginální distribuční funkce,

d) sdruženou distribuční funkci,

e) podmíněné hustoty,

f) střední hodnoty a rozptyly veličin X, Y,

g) (ko)varianční a korelační matice náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Řešení.

a) $c = 1$, b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x, & x \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & y \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$,

c) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty;0) \\ \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2}, & x \in \langle 0;1\rangle \\ 1, & x \in (1;\infty) \end{cases}$, $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty;0) \\ \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}, & y \in \langle 0;1\rangle \\ 1, & y \in (1;\infty) \end{cases}$,

d) $F(x,y) = \begin{cases} xy - \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2}, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \\ \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2}, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times (1;\infty) \\ \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}, & (x,y) \in (1;\infty) \times \langle 0;1\rangle \\ 1, & (x,y) \in (1;\infty) \times (1;\infty) \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$,

e) $f(x|y) = \frac{1-x+y}{y+\frac{1}{2}}$, $(x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$, $f(y|x) = \frac{1-x+y}{\frac{3}{2}-x}$, $(x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$

f) $\mathrm{E}X = \frac{5}{12}$, $\mathrm{D}X = \frac{11}{144}$, $\mathrm{E}Y = \frac{7}{12}$, $\mathrm{D}Y = \frac{11}{144}$,

g) $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{11}{144} & \frac{1}{144} \\ \frac{1}{144} & \frac{11}{144} \end{pmatrix}$, $\mathrm{cor}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & 1 \end{pmatrix}$

□

Příklad 5.22. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rozdělení určené funkcí

$$f(x,y)=\begin{cases} c\frac{x^2}{1+y^2}, & (x,y)\in\langle 2;3\rangle\times\langle 0;1\rangle\,,\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases}$$

Určete

a) c,

b) sdruženou distribuční funkci,

c) zda jsou veličiny X, Y nezávislé.

Řešení.

a) $c=\frac{12}{19\pi}$, b) $F(x,y)=\begin{cases} \frac{4}{19\pi}(x^3-8)\operatorname{arctg}(y), & (x,y)\in\langle 2;3\rangle\times\langle 0;1\rangle\\ \frac{1}{19}(x^3-8), & (x,y)\in\langle 2;3\rangle\times(1;\infty)\\ \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(y), & (x,y)\in(3;\infty)\times\langle 0;1\rangle\\ 1, & (x,y)\in(3;\infty)\times(1;\infty)\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases}$,

c) jsou nezávislé

□

Příklad 5.23. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y), & (x,y)\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle\times\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle,\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases}$$

Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

Řešení.

$\frac{\pi}{4}$

□

Příklad 5.24. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f(x,y)=\begin{cases} cx\cos(y), & (x,y)\in\langle 1;3\rangle\times\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle,\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases}$$

Určete c a $F(x,y)$ pro $(x,y)\in\langle 1;3\rangle\times\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Řešení.

$c=\frac{1}{4}$, $F(x,y)=\frac{x^2-1}{8}\sin(y)$ pro $(x,y)\in\langle 1;3\rangle\times\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$

□

Příklad 5.25. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y), & (x,y) \in \langle 0;2\rangle \times \langle 0;1\rangle\,, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete c a $F(x,y)$ pro $(x,y) \in \langle 0;2\rangle \times \langle 1;\infty)$.

Řešení.
$c = \frac{3}{11}$, $F(x,y) = \frac{x^3}{11} + \frac{3}{22}x$ pro $(x,y) \in \langle 0;2\rangle \times \langle 1;\infty)$ $(= F_X(x))$

$\square$

Příklad 5.26. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{c+x^2}{y}, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 1;\mathrm{e}\rangle\,, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete c a $F(x,y)$ pro $(x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 1;\mathrm{e}\rangle$.

Řešení.
$c = \frac{2}{3}$, $F(x,y) = \frac{1}{3}\ln(y)(x^3+2x)$ pro $(x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 1;\mathrm{e}\rangle$

$\square$

Příklad 5.27. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y-x^2}{c}, & (x,y) \in \langle 1;2\rangle \times \langle 0;1\rangle\,, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete c a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé.

Řešení.
$c = -\frac{11}{6}$, X a Y nejsou nezávislé

$\square$

Příklad 5.28. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x-y)^2, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 1;2\rangle\,, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete c a $F_Y(y)$.

Řešení.
$c = \frac{6}{7}$, $F_Y(y) = \frac{1}{7}(2y^3 - 3y^2 + 2y - 1)$ pro $y \in \langle 1;2\rangle$

$\square$

Příklad 5.29. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení pravděpodobnosti se sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} c(2x+3y^2) & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle\,, y \in \langle -1,1\rangle\,, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete hodnotu konstanty c.

b) Najděte marginální hustoty.

c) Najděte podmíněné hustoty $f(x|y)$ a $f(y|x)$.

d) Vypočtěte $P(X < 0{,}5|Y = 0)$

Řešení.

a) $c = \frac{1}{4}$; b) $f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1+3y^2}{4}, & y \in \langle -1,1\rangle \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases}$

c) $f(x|y) = \frac{2x+3y^2}{1+3y^2}$, $f(y|x) = \frac{2x+3y}{4x+2}$; d) $\frac{1}{4}$

□

Příklad 5.30. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení pravděpodobnosti se sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(y-x)^2 & \text{pro } (x,y) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle\,, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Vypočtěte $P(Y > X)$.

b) Najděte marginální hustoty.

c) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé.

Řešení.

a) $\frac{15}{16}$; b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2 - 6x + 4), & x \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(3y^2 - 3y + 1), & y \in \langle 0,2\rangle \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases}$

c) nejsou nezávislé

□

Příklad 5.31. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení pravděpodobnosti se sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, x\mathrm{e}^{-xy} & \text{pro } 1 \le x \le 3;\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Najděte marginální hustotu $f_X(x)$.

b) Najděte podmíněnou hustotu $f(y|x)$.

c) Jaké rozdělení pravděpodobnosti má náhodná veličina Y za podmínky, že $X = 2$? Určete podmíněnou střední hodnotu $\mathrm{E}(Y|X = 2)$.

Řešení.

a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$; b) $f(y|x) = x\mathrm{e}^{-xy}$ pro $1 \leq x \leq 3$; $y > 0$;

c) $(Y|X = 2) \sim \mathrm{Exp}(2)$, $\mathrm{E}(Y|X = 2) = \frac{1}{2}$

□

Příklad 5.32. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení pravděpodobnosti se sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}\,\mathrm{e}^{-y} & \text{pro } x \geq 2, y \geq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Najděte sdruženou distribuční funkci.

b) Najděte marginální distribuční funkce.

c) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé.

d) Vypočtěte kovarianci náhodných veličin X, Y.

Řešení.

a) $F(x, y) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-y})\left(1 - \frac{2}{x}\right), & x \geq 2, y \geq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$;

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1 - \frac{2}{x}, & x \geq 2; \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-y}, & y \geq 0 \end{cases}$; c) jsou nezávislé; d) 0

□

Příklad 5.33. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení pravděpodobnosti se sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(6x^2 + 2y) & \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Najděte distribuční funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

b) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé.

b) Sestavte (ko)varianční matici a korelační matici.

Řešení.

a)

$x \backslash y$	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, 1)$	$\langle 1, \infty)$
$(-\infty, -1)$	0	0	0
$\langle -1, 1)$	0	$\frac{1}{6}(2x^3y + xy^2 + 2y + y^2)$	$\frac{1}{6}(2x^3 + x + 3)$
$\langle 1, \infty)$	0	$\frac{1}{3}(2y + y^2)$	1

b) nejsou nezávislé; c) $\operatorname{var}(X, Y) = \begin{pmatrix} \frac{23}{45} & 0 \\ 0 & \frac{13}{162} \end{pmatrix}$ $\operatorname{cor}(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\square$

6 Bodové a intervalové odhady

Příklad 6.1. Meteorologická stanice měří každý den v 10:00 teplotu vzduchu. Během 10 letních dnů byly naměřeny následující hodnoty ve °C:

$$25{,}4;\ 28{,}0;\ 20{,}1;\ 27{,}4;\ 25{,}6;\ 23{,}9;\ 24{,}8;\ 26{,}4;\ 27{,}0;\ 25{,}4$$

Určete bodový odhad střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky teploty vzduchu.

Řešení.
$\widehat{\mu} = 25{,}4, \quad \widehat{\sigma}^2 \doteq 5{,}006667, \quad \widehat{\sigma} \doteq 2{,}237558$

□

Příklad 6.2. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Metodou maximální věrohodnosti určete odhady parametrů μ a σ^2.

Řešení.
$\widehat{\mu} = \overline{x}, \quad \widehat{\sigma}^2 = s_n^2$

□

Příklad 6.3. V nejmenované obci Zlínského kraje proběhlo tajné měření rychlosti vozidel projíždějících kolem školy. U 20 náhodně vybraných automobilů byly zjištěny tyto hodnoty v km/h:

$$65;\ 68;\ 67;\ 60;\ 56;\ 66;\ 55;\ 64;\ 55;\ 65;\ 63;\ 62;\ 63;\ 59;\ 58;\ 64;\ 65;\ 63;\ 57;\ 61$$

Předpokládejme, že rychlost vozidel v daném úseku je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete

a) bodový odhad střední hodnoty a rozptylu rychlosti vozidel,

b) v jakých mezích lze očekávat střední rychlost vozidel se spolehlivostí 95 %,

c) střední rychlost vozidel, která s 95% spolehlivostí nebude překročena.

Řešení.
a) $\widehat{\mu} = 61{,}8$, $\quad \widehat{\sigma}^2 \doteq 15{,}95789$, $\quad$ b) $\mu \in (59{,}93043; 63{,}66957)$, $\quad$ c) $\mu \in (0; 63{,}34443)$

□

Příklad 6.4. Podle dostupných informací má výška chlapců ve věku 10 let normální rozdělení s rozptylem 39,112 cm^2. Při měření výšky 15 chlapců během hodiny tělocviku jsme získali průměrnou výšku 139,13 cm. Určete

a) 95% interval spolehlivosti pro střední výšku postavy,

b) pod jakou hranicí nelze očekávat střední výšku chlapců s 95% spolehlivostí.

Řešení.
a) $\mu \in (135{,}9651; 142{,}2949)$, $\quad$ b) $\mu \in (136{,}4818; \infty)$

□

Příklad 6.5. Pražírna kávy prodává kávu v baleních o předepsané hmotnosti 250 g. Za účelem posouzení přesnosti balicího automatu bylo náhodně vybráno 15 balení, u kterých byly zjištěny následující hmotnosti:

$$238; 256; 266; 240; 260; 235; 263; 259; 234; 258; 253; 265; 234; 245; 237$$

Pražírna považuje balení za dostatečně přesné, jestliže směrodatná odchylka hmotnosti balení nepřekročí 15 g. Předpokládejme, že hmotnost balení je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete

a) v jakých mezích lze očekávat rozptyl hmotnosti balení se spolehlivostí 95 %,

b) zda s 95% spolehlivostí automat provádí balení dostatečně přesně.

Řešení.
a) $\sigma^2 \in (80{,}85047; 375{,}1525)$, $\quad$ b) $\sigma \in (0; 17{,}92684)$, neprovádí balení dost přesně

□

Příklad 6.6. Měřením životnosti určité součástky jsme zjistili následující hodnoty v hodinách:

973; 992; 968; 830; 1047; 1007; 1051; 1235; 1004; 958;
1009; 971; 897; 883; 859; 1100; 946; 1143; 1038; 875;
957; 909; 1173; 1046; 1024; 975; 959; 1080; 1084; 961;
1129; 856; 909; 1185; 1070; 1073; 1074; 995; 938; 962;
914; 1106; 709; 1107; 922; 945; 1060; 1091; 782; 1073

Určete

a) bodový odhad střední hodnoty a rozptylu životnosti součástky,

b) v jakých mezích lze očekávat střední životnost součástky se spolehlivostí 95 %.

Řešení.

a) $\widehat{\mu} = 997{,}08$, $\widehat{\sigma}^2 \doteq 10963{,}87$, b) $\mu \in (968{,}0563; 1026{,}104)$

□

Příklad 6.7. Měřením rychlosti cyklistů v obci jsme zjistili následující hodnoty v km/h:

25,8; 30,5; 24,0; 27,7; 26,5; 21,2; 25,1; 28,3; 24,6; 21,8;
27,6; 23,9; 25,5; 21,3; 29,4; 25,0; 24,9; 25,1; 21,5; 23,4;
29,1; 29,2; 23,8; 23,7; 28,0

Určete, v jakých mezích lze očekávat střední rychlost cyklistů se spolehlivostí 98 %.

Řešení.

$\mu \in (24{,}22059; 26{,}73141)$

□

Příklad 6.8. Na náměstí se koná pivní festival. Anketou mezi účastníky byly zjištěny následující počty zkonzumovaných piv:

8; 5; 10; 3; 5; 7; 0; 4; 5; 5; 6; 6; 5; 9; 3; 5

Předpokládejme, že počet vypitých piv je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete, v jakých mezích lze očekávat rozptyl počtu piv se spolehlivostí 99 %.

Řešení.

$\sigma^2 \in (2{,}675223; 19{,}07194)$

□

Příklad 6.9. Terezka má velmi ráda čokoládu. Vždy, když si v obchodě nějakou koupí, tak si pak nemůže pomoct a co nejdříve ji musí sníst. Za poslední měsíc si zapisovala, za jak dlouho po opuštění obchodu čokoládu rozbalila. Získala následující hodnoty v minutách:

40; 34; 47; 19; 48; 30; 24; 36; 46; 41; 55; 36; 27; 53; 43; 17; 41; 40; 29; 47; 17; 32; 33; 51

Určete, pod jakou hranicí bude ležet střední doba do rozbalení čokolády se spolehlivostí 98 %.

Řešení.

$\mu \in (0; 41{,}55167)$

□

Příklad 6.10. Měřením spotřeby naftové elektrocentrály během pracovní směny byly zjištěny tyto hodnoty v litrech:

$$5{,}6;\ 8{,}8;\ 7{,}3;\ 6{,}9;\ 10{,}0;\ 7{,}5;\ 9{,}6;\ 6{,}5;\ 7{,}5;\ 7{,}6;\ 9{,}0;\ 9{,}8;\ 9{,}2;\ 7{,}6;\ 9{,}3;\ 7{,}5$$

Předpokládejme, že spotřeba elektrocentrály je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete, pod jakou hranici neklesne rozptyl spotřeby s 99% spolehlivostí.

Řešení.

$\sigma^2 \in (0{,}8231204; \infty)$

□

Příklad 6.11. Adam rád hraje poker s kamarády. Protože je z nich nejzkušenější, tak často vyhrává. Výhry v několika hrách si zapisoval a získal následující hodnoty v dolarech:

$$14{,}9;\ 19{,}6;\ 18{,}8;\ 15{,}9;\ 23{,}9;\ 19{,}2;\ 24{,}9;\ 28{,}6;\ 21{,}3;\ 21{,}8;\ 25{,}9;\ 23{,}2;\ 26{,}5;\ 20{,}9;\ 28{,}0$$

Předpokládejme, že Adamova výhra v každé hře je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete, v jakých mezích lze očekávat střední výhru se spolehlivostí 90 %.

Řešení.

$\mu \in (20{,}34052; 24{,}11282)$

□

Příklad 6.12. Měřením spotřeby automobilů na jistém úseku dálnice při konstantní rychlosti 130 km/h byly zjištěny tyto hodnoty v litrech:

$$9{,}9;\ 11{,}6;\ 4{,}8;\ 7{,}4;\ 7{,}3;\ 8{,}7;\ 5{,}3;\ 12{,}8;\ 8{,}1;\ 11{,}1;\ 4{,}2;\ 9{,}8;\ 5{,}4;\ 8{,}1;\ 6{,}4;\ 10{,}4$$

Předpokládejme, že spotřeba vozidel v daném úseku je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete, pod jakou hranici neklesne střední spotřeba s 90% spolehlivostí.

Řešení.

$\mu \in (7{,}339819; \infty)$

□

Příklad 6.13. Anička dostává od rodičů finanční odměnu za každou jedničku, kterou dostane ve škole. Za několik posledních týdnů získala následující částky v Kč:

$$52;\ 70;\ 61;\ 57;\ 54;\ 66;\ 55;\ 54;\ 54;\ 57;\ 50;\ 55;\ 59;\ 54;\ 50;\ 49;\ 60;\ 67$$

Předpokládejme, že výše odměny je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete, pod jakou hranicí lze očekávat střední odměnu se spolehlivostí 99 %.

Řešení.

$\mu \in (0; 60{,}51258)$

□

Příklad 6.14. Denní počet výrobků jisté dílny má přibližně normální rozdělení. Během 10 dnů byly postupně vyrobeny následující počty výrobků:

$$508,\ 491,\ 501,\ 495,\ 503,\ 494,\ 505,\ 507,\ 517,\ 498.$$

a) Najděte bodový odhad střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky denního počtu výrobků.

b) Najděte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu.

c) Najděte 95% interval spolehlivosti pro rozptyl.

Řešení.
a) $\hat{\mu} = 501{,}9, \hat{\sigma}^2 \doteq 60{,}7667, \hat{\sigma} \doteq 7{,}7953$; b) $\mu \in (496{,}3236;\ 507{,}4764)$; c) $\sigma^2 \in (28{,}7498;\ 202{,}5263)$

□

Příklad 6.15. Na pile řežou střešní latě. Předpokládáme, že délka uříznuté latě je náhodná veličina s normálním rozdělením. Měřením latí jsme zjistili následující hodnoty v centimetrech:

$$297{,}4;\ 300{,}5;\ 304{,}9;\ 303{,}2;\ 297{,}9;\ 298{,}4;\ 300{,}6;\ 300{,}0;\ 305{,}1;\ 310{,}2;\ 294{,}7;\ 300{,}2.$$

a) Jakou hodnotu přesáhne střední délka latě se spolehlivostí 95 %?

b) Jakou hodnotu přesáhne střední délka latě se spolehlivostí 99 %? Dříve, než budeme počítat: Jaká bude výsledná hodnota v porovnání s a)? Větší, menší, stejná?

c) Pro výrobce (a především pro zákazníky) je nepřijatelné, aby střední délka latí byla menší než 298 cm. Můžeme se spolehlivostí 95 % na základě naměřených hodnot udělat závěr, že střední délka latí není příliš malá? A co s 99% spolehlivostí?

Řešení.
a) 298,9231; b) 297,8095; c) se spolehlivostí 95 % ano, se spolehlivostí 99 % ne

□

Příklad 6.16. Ve kapitole o normálním rozdělení jsme měli příklad s čokoládou 4.68:

Hmotnost tabulky čokolády je náhodná veličina s normálním rozdělením.

Mimo jiné jsme zjistili, že výrobce by z určitého důvodu chtěl, aby směrodatná odchylka byla menší než 1,5 g. Teď testuje balicí zařízení, jestli se mu toho podařilo dosáhnout. Byly zjištěny následující hodnoty

$$86{,}0;\ 88{,}5;\ 87{,}6;\ 87{,}5;\ 87{,}4;\ 86{,}1;\ 88{,}4;\ 89{,}5;\ 87{,}4;\ 87{,}0;$$
$$86{,}6;\ 88{,}2;\ 89{,}1;\ 86{,}9;\ 90{,}1;\ 85{,}9;\ 87{,}5;\ 86{,}6;\ 86{,}6;\ 89{,}4.$$

a) Pod jakou hranicí je rozptyl se spolehlivostí 95 %?

b) Můžeme z výsledku části a) udělat závěr, že směrodatná odchylka je se spolehlivostí 95 % dostatečně malá?

Řešení.

a) 2,8472; b) ne

□

Příklad 6.17. Doba potřebná na opravu jedné písemky má normální rozdělení. Z dlouhodobé zkušenosti vím, že směrodatná odchylka pro čas opravování je $\sigma = 2$ minuty. Změřila jsem si časy potřebné pro opravu prvních deseti písemek v minutách:

10,3; 12,1; 10,7; 9,4; 11,1; 8,7; 9,6; 8,6; 8,4; 10,1.

a) Najděte 99% interval spolehlivosti pro střední hodnotu doby opravování jedné písemky.

b) Kdyby mi tentýž průměr $\overline{x}$ vyšel pro $n = 20$ písemek, jaký by byl interval spolehlivosti v porovnání s výsledkem z části a) (užší/širší/bez výpočtu nevím)?

c) Jaká je „nejhorší“ možnost pro střední hodnotu se spolehlivostí 99%?

Řešení.

a) $\mu \in (8{,}2683;\ 11{,}5317)$; b) užší; c) 11,3736

□

Příklad 6.18. Byla zkoumána koncentrace rtuti ve svalové tkáni ryb. Z hodnot vzorků odebraných 53 rybám byl vypočten aritmetický průměr $\overline{x} = 0{,}5250$ ppm a výběrová směrodatná odchylka $s = 0{,}3486$ ppm.

(Pozn. ppm = parts per million, obdoba procent a promile.)

Najděte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu koncentraci rtuti v tkáni ryby.

Řešení.

$\mu \in (0{,}4311;\ 0{,}6189)$

□

Příklad 6.19. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhady parametrů μ a σ^2 normálního rozdělení pro empiricky získaná data stejná jako v příkladu 6.14.

Řešení.

Obecně: $\hat{\mu} = \overline{x}, \hat{\sigma}^2 = s_n^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. Pro daná data: $\hat{\mu} = 501{,}9$; $\hat{\sigma}^2 = 54{,}6900$

□

Příklad 6.20. Nezávisle na sobě opakujeme pokus, u kterého je pravděpodobnost úspěchu rovna π. Pokus vždy opakujeme tak dlouho, dokud nedosáhneme úspěchu. Takto jsme to provedli desetkrát a počty pokusů nutné k dosažení prvního úspěchu byly:

$$2;\ 7;\ 2;\ 6;\ 5;\ 8;\ 8;\ 2;\ 2;\ 4$$

Metodou maximální věrohodnosti odhadněte hodnotu parametru π. Nejprve odvoďte obecný vzorec, pak do něj naměřené hodnoty dosaďte.

Řešení.

Obecně $\hat{\pi} = \frac{1}{\bar{x}}$. Pro daná data $\hat{\pi} \doteq 0{,}2174$.

$\square$

7 Testování statistických hypotéz

Příklad 7.1. Výrobce jisté naftové elektrocentrály tvrdí, že průměrná spotřeba paliva během 12hodinové směny nepřekročí 6,4 l. U 20 náhodně vybraných elektrocentrál byly zjištěny tyto hodnoty:

6,5; 6,8; 6,7; 6,0; 5,6; 6,6; 5,5; 6,4; 5,5; 6,5; 6,3; 6,2; 6,3; 5,9; 5,8; 6,4; 6,5; 6,3; 5,7; 6,1

Předpokládejme, že spotřeba nafty je náhodná veličina s normálním rozdělením. Ověřte pravdivost tvrzení výrobce.

Řešení.
$H_0 : \mu = 6{,}4, \quad H_1 : \mu < 6{,}4, \quad T \doteq -2{,}46292, \quad t_{0{,}95}(19) \doteq 1{,}729,$ zamítáme H_0

□

Příklad 7.2. Výrobce halogenových žárovek do auta tvrdí, že jeho žárovky mají životnost v průměru 1000 hodin. Na základě údajů o životnosti 50 náhodně vybraných žárovek byla zjištěna průměrná životnost 997,08 hodin se směrodatnou odchylkou 104,709 hodin. Zjistěte, zda není průměrná životnost náhodou nižší.

Řešení.
$H_0 : \mu = 1000, \quad H_1 : \mu < 1000, \quad U \doteq -0{,}197, \quad u_{0{,}95} \doteq 1{,}645,$ nezamítáme H_0

□

Příklad 7.3. Pražírna kávy prodává kávu v baleních o předepsané hmotnosti 250 g. Za účelem posouzení přesnosti balicího automatu bylo náhodně vybráno 15 balení, u kterých byly zjištěny následující hmotnosti:

238; 256; 266; 240; 260; 235; 263; 259; 234; 258; 253; 265; 234; 245; 237

Pražírna považuje balení za dostatečně přesné, jestliže směrodatná odchylka hmotnosti balení nepřekročí 15 g. Předpokládejme, že hmotnost balení je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete, zda s 95% spolehlivostí automat provádí balení dostatečně přesně.

Řešení.
$H_0 : \sigma^2 = 15^2, \quad H_1 : \sigma^2 < 15^2, \quad K \doteq 9{,}385482, \quad \chi^2_{0{,}05}(14) \doteq 6{,}571,$ nezamítáme H_0

□

Příklad 7.4. Cestovní kancelář udělala statistiku svých zájezdů a zjistila, že 30 % z nich míří do jisté africké země. Po zhoršení postojů místního obyvatelstva k cizincům se kancelář obává, že se zájem o tuto zemi mezi zákazníky sníží. Proto oslovila 150 náhodně vybraných zákazníků a zjistila, že 38 z nich má za cíl právě tuto africkou zemi. Prokazují nejnovější data pokles zájmu?

Řešení.
$H_0 : \pi = 0{,}3, \quad H_1 : \pi < 0{,}3, \quad U \doteq -1{,}247, \quad u_{0,95} \doteq 1{,}645,$ nezamítáme H_0

□

Příklad 7.5. V rámci tělesné výchovy byl u skupiny studentů (experimentální skupina) zaveden inovovaný způsob tréninku. Za předpokladu, že se jedná o výběry z normálního rozdělení, ověřte, zda tento nový způsob tréninku vede k lepším výkonům ve skoku do dálky z místa. Výsledky v cm jsou v následující tabulce:

Experimentální (X)	236; 240; 227; 235; 218; 246; 242; 240; 254; 221; 245; 231; 258; 245; 225; 242; 251; 257; 235
Kontrolní (Y)	225; 240; 213; 242; 221; 252; 222; 217; 241; 230; 205; 245; 214; 240; 218

Řešení.
$H_0 : \mu_x = \mu_y, \quad H_1 : \mu_x > \mu_y, \quad T \doteq 2{,}449937, \quad \nu \doteq 26{,}88991, \quad t_{0,95}(26) \doteq 1{,}706,$
zamítáme H_0

□

Příklad 7.6. Jistá brněnská firma často spolupracuje se zahraničními partnery. Proto poslala jednu svou divizi na několikaměsíční jazykový kurz francouzštiny. Aby bylo možné posoudit, zda mají takové kurzy smysl, byly u zaměstnanců porovnány výsledky ze vstupního a závěrečného test. Počty bodů získané jednotlivými zaměstnanci před a po kurzu zachycuje tabulka:

Zaměstnanec	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Před kurzem (X)	143	105	175	133	132	133	140	110	101
Po kurzu (Y)	147	113	172	135	133	133	142	115	109

Za předpokladu, že bodová hodnocení mají normální rozdělení, prověřte, zda došlo k významnému zlepšení znalostí francouzštiny.

Řešení.
$H_0 : \mu_x = \mu_y, \quad H_1 : \mu_x < \mu_y, \quad T \doteq -2{,}47249, \quad t_{0,95}(8) \doteq 1{,}860,$ zamítáme H_0

□

Příklad 7.7. Laboratoř měří obsah železa ve vzorcích železné rudy dvěma metodami. První metoda je klasická, druhá byla nově vyvinuta. Byly získány následující výsledky:

Klasická (X)	24,16; 36,99; 29,10; 31,21; 48,82; 48,43; 38,11; 37,62; 57,21; 41,43; 38,94; 45,77
Nová (Y)	24,26; 37,31; 28,95; 31,66; 49,33; 48,90; 38,37; 38,11; 57,44; 42,01; 39,28; 46,15

Za předpokladu, že množství železa je náhodná veličina s normálním rozdělením, zjistěte, zda je nová metoda přesnější, co se týče rozptylu měření.

Řešení.
$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$, $H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$, $F \doteq 0{,}9802869$, $F_{0{,}95}(11, 11) \doteq 2{,}818$, nezamítáme H_0

□

Příklad 7.8. Jistá firma má ve svém majetku zahrnuto 18 vozidel. Ráno odjíždí všechna vozidla s plnou nádrží, odpoledne jsou pak opět dotankována, aby byla připravena na další den. Denní spotřeby vozidel byly následující:

31,0; 33,8; 33,3; 31,5; 36,3; 33,5; 36,9; 39,1; 34,8;
35,1; 37,5; 35,9; 37,9; 34,6; 38,8; 33,8; 36,5; 34,5

Předpokládejme, že denní spotřeba vozidel je náhodná veličina s normálním rozdělením. Na hladině významnosti 5 % zjistěte, zda je průměrná denní spotřeba vyšší než 35 litrů.

Řešení.
$H_0 : \mu = 35$, $H_1 : \mu > 35$, $T \doteq 0{,}4924757$, $t_{0{,}95}(17) \doteq 1{,}740$, nezamítáme H_0

□

Příklad 7.9. V cementárně plní pytle s cementem pomocí dvou dávkovačů. Byly získány následující hodnoty v kg:

Dávkovač A (X)	23,8; 25,4; 24,7; 24,5; 26,0; 24,8; 25,8; 24,3; 24,7; 24,8; 25,5; 25,9
Dávkovač B (Y)	26,8; 23,3; 28,1; 21,8; 23,6; 25,6; 18,7; 22,8; 23,6; 23,4; 24,5; 24,2; 23,2

Předpokládejme, že množství cementu je náhodná veličina s normálním rozdělením. Na hladině významnosti 0,05 zjistěte, zda oba dávkovače v průměru plní pytle stejným množstvím cementu.

Řešení.
$H_0 : \mu_x = \mu_y$, $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, $T \doteq 1{,}799805$, $\nu \doteq 14{,}34001$, $t_{0{,}975}(14) \doteq 2{,}145$, nezamítáme H_0

□

Příklad 7.10. Automat na kávu dávkuje do kelímku 250 ml nápoje. Podle údajů v manuálu je nejvyšší možný rozptyl objemu nápoje 100 ml^2. Zákazníci si však stěžují, že jim už několikrát přetekl kelímek. Provozovatel automatu zakoupil několik káv, aby celou situaci posoudil. Dostal následující hodnoty v ml:

$$252; 249; 231; 243; 256; 258; 234; 247; 228; 248; 269; 263; 248$$

Předpokládejme, že množství nápoje v kelímku je náhodná veličina s normálním rozdělením. Na hladině významnosti 0,01 zjistěte, zda rozptyl množství nápoje překračuje hodnotu z manuálu.

Řešení.
$H_0 : \sigma^2 = 100, \quad H_1 : \sigma^2 > 100, \quad K \doteq 17{,}57692, \quad \chi^2_{0{,}99}(12) \doteq 26{,}217, \quad$ nezamítáme H_0

□

Příklad 7.11. Ve výzkumném ústavu zkoumali vliv teploty skladování na kvalitu hovězího masa. Čerstvost masa byla posuzována na základě obsahu kadaverinu, přičemž vysoké hodnoty indikují zkažené maso. Dvě skupiny vzorků masa byly skladovány určitý počet dnů při určité teplotě. Skupina A byla skladována při teplotě -17 °C, skupina B při 4 °C. Byly zjištěny následující hodnoty koncentrací v mg/kg:

Skupina A (X)	2,3; 1,3; 3,9; 1,2; 3,9; 2,1; 2,6; 1,8; 1,9; 2,1
Skupina B (Y)	5,3; 4,3; 5,9; 4,2; 4,9; 4,1; 5,6; 3,8; 2,9; 3,1

Na hladině významnosti 1% rozhodněte, zda je maso skladované při vyšší teplotě více náchylné ke ztrátě čerstvosti. Předpokládejte, že sledované veličiny mají normální rozdělení.

Řešení.
$H_0 : \mu_x = \mu_y, \quad H_1 : \mu_x < \mu_y, \quad T \doteq -4{,}818012, \quad \nu \doteq 17{,}89968, \quad t_{0{,}99}(17) \doteq 2{,}567,$
zamítáme H_0

□

Příklad 7.12. V supermarketu uvádí do prodeje nový výrobek. Podle expertního odhadu bude mít zájem o nový výrobek 20 % zákazníků. Ze 400 dotázaných zákazníků před supermarketem projevilo zájem 62 zákazníků. Se spolehlivostí 95 % rozhodněte, zda se expert se svým odhadem trefil.

Řešení.
$H_0 : \pi = 0{,}2, \quad H_1 : \pi \neq 0{,}2, \quad U \doteq -2{,}25, \quad u_{0{,}975} \doteq 1{,}960, \quad$ zamítáme H_0

□

Příklad 7.13. U skupiny devíti pacientů trpících depresí byl zjišťován účinek léku na zlepšení nálady. Nejprve byl u každého pacienta určen momentální psychický stav na stupnici od 0 do 20. Vyšší hodnoty indikují lepší náladu pacienta. Poté byl pacientům podán lék a po určité době byl opět určen momentální psychický stav. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce:

Před podáním (X)	3	0	6	7	4	3	2	1	4
Po podání (Y)	5	1	5	7	10	9	7	11	8

Na hladině významnosti 0,05 rozhodněte, zda má podání léku významný vliv na změnu nálady pacienta. Předpokládejte, že sledované veličiny mají normální rozdělení.

Řešení.
$H_0 : \mu_x = \mu_y, \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y, \quad T \doteq -3{,}142857, \quad t_{0{,}975}(8) \doteq 2{,}306,$ zamítáme H_0

□

Příklad 7.14. Obchod s potravinami v malé obci nakupuje brambůrky v balíčcích o předepsané hmotnosti 80 g od dvou dodavatelů. Jelikož na vesnici se nic neutají, k majiteli obchodu se doneslo, že množství brambůrek v balíčcích od druhého dodavatele má značné výkyvy. Proto majitel obchodu náhodně vybral několik balíčků od každého dodavatele a zjistil následující hmotnosti:

Dodavatel 1	79; 79; 80; 81; 79; 82; 79; 79; 80; 81; 80
Dodavatel 2	77; 79; 79; 83; 84; 77; 80; 78; 79; 81; 78

Na základě provedeného šetření rozhodněte se spolehlivostí 99 %, zda se rozptyly hmotností balíčků od různých dodavatelů od sebe liší. Předpokládejme, že hmotnost balíčků je náhodná veličina s normálním rozdělením.

Řešení.
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2, \quad F \doteq 0{,}2068966, \quad F_{0{,}005}(10, 10) \doteq 0{,}171,$
$F_{0{,}995}(10, 10) \doteq 5{,}847,$ nezamítáme H_0

□

Příklad 7.15. Na pile řežou střešní latě. Předpokládáme, že délka uříznuté latě je náhodná veličina s normálním rozdělením. Pro výrobce (a především pro zákazníky) je nepřijatelné, aby střední délka latí byla menší než 298 cm.

a) Testujte na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$, zda je tento požadavek splněn, tj. jestli je střední délka latí větší než 298 cm, jestliže jsme měřením náhodně vybraných 12 latí zjistili následující hodnoty v centimetrech:

297,4; 300,5; 304,9; 303,2; 297,9; 298,4; 300,6; 300,0; 305,1; 310,2; 294,7; 300,2.

b) Co kdyby nám stejné hodnoty $\overline{x}$ a s^2 vyšly pro 20 latí? Když už známe výsledek a), můžeme bez výpočtů říci, jak by test dopadl teď?

c) Co kdybychom tentýž test jako v a) provedli na hladině významnosti $\alpha' = 0{,}01$? Když už známe výsledek a), můžeme bez výpočtů říci, jak by test dopadl teď?

d) Co kdybychom test prováděli z pohledu někoho, kdo si chce stěžovat, a snažili se prokázat, že je střední délka latí menší než 298 cm?

Řešení.

a) $H_0\colon \mu = 298, H_1\colon \mu > 298,\quad T \doteq 2{,}5603,\quad t_{0{,}95}(11) \doteq 1{,}796,\quad H_0$ zamítáme
b) H_0 také zamítneme (bez dalších nutných výpočtů)
c) Je nutno najít $t_{0{,}99}(11) \doteq 2{,}718$, H_0 nezamítáme
d) $H_0\colon \mu = 298, H_1\colon \mu < 298$, H_0 nezamítáme

□

Příklad 7.16. Na plastových deskách určitého typu se ojediněle vyskytují povrchové vady. Výrobce tvrdí, že průměrný počet vad připadajících na jednu desku je menší než 1. Testujte, jestli je jeho tvrzení oprávněné, jestliže jsme na náhodně vybraných 100 deskách zjistili následující počty vad:

počet vad	0	1	2	3	4
četnost	34	41	19	5	1

Řešení.

$H_0\colon \mu = 1, H_1\colon \mu < 1,\quad U \doteq -0{,}2198,\quad u_{0{,}95} \doteq 1{,}645,\quad H_0$ nezamítáme

□

Příklad 7.17. Martin velice rád hraje Hledání min. Chlubí se Karlovi, že v kategorii Expert vyhrává průměrně zhruba každou pátou hru. Karel mu to nevěří a tvrdí, že to tolik být nemůže. Podle záznamů Martin z posledních 50 her vyhrál 8.

a) Kdo má pravdu? Martin, nebo Karel?

b) Při kolika výhrách z celkových 50 her bychom nulovou hypotézu zamítli?

c) Při jakém počtu her by úspěšnost 16 % stačila k zamítnutí nulové hypotézy?

Řešení.

a) $H_0\colon \pi = 0{,}2, H_1\colon \pi < 0{,}2,\quad U \doteq -0{,}7071,\quad u_{0{,}95} \doteq 1{,}645,\quad H_0$ nezamítáme, Karlovy pochybnosti se neprokázaly.
b) při pěti nebo méně výhrách; c) při 271 nebo více hrách

□

Příklad 7.18. Přísný šéfkuchař kontroluje, jestli jeho podřízení krájí mrkev na stejně tlustá kolečka. Vyžaduje, aby směrodatná odchylka tloušťky kolečka nepřesáhla půl milimetru (ve své krutosti se kromě vaření dokonce naučil statistiku a pořídil si přesný měřicí nástroj). Předpokládejme, že tloušťka krájených koleček mrkve má normální rozdělení. Podřízený kuchař nakrájel mrkev na takto silná kolečka (v milimetrech):

9,6; 10,2; 10,8; 9,9; 9,5; 9,9; 9,8; 9,9; 10,2; 9,9;
9,7; 9,8; 9,4; 9,6; 9,4; 9,8; 9,5; 9,7; 9,9; 9,5

a) Obstojí tento zaměstnanec před šéfem? Tj. je směrodatná odchylka prokazatelně menší než půl milimetru?

b) Testujte, zda se střední hodnota tloušťky koleček významně liší od 10 mm.

Řešení.
a) $H_0\colon \sigma^2 = 0{,}5^2, H_1\colon \sigma^2 < 0{,}5^2, \quad K \doteq 8{,}2400, \chi^2_{0{,}05}(19) \doteq 10{,}117, H_0$ zamítáme, uff...
b) $H_0\colon \mu = 10, H_1\colon \mu \neq 10, \quad T \doteq -2{,}7161, \quad t_{0{,}975}(19) \doteq 2{,}093, \quad H_0$ zamítáme

□

Příklad 7.19. Byl zkoumán vliv čokolády na antioxidační funkci krevní plazmy. Dobrovolníci v dobrém zdravotním stavu, všichni zhruba stejné hmotnosti a tělesné konstituce, dostávali čokoládu. Byli rozděleni do dvou skupin po 12 lidech. První skupina jedla každý den 100 g hořké čokolády, druhá skupina 200 g mléčné čokolády. Vždy hodinu po konzumaci jim byla změřena antioxidační kapacita krevní plazmy. Průměrné kapacity jednotlivých dobrovolníků byly:

Skupina s hořkou čokoládou (h):

118,8; 122,6; 115,6; 113,6; 119,5; 115,9; 115,8; 115,1; 116,9; 115,4; 115,6; 107,9

Skupina s mléčnou čokoládou (m):

102,1; 105,8; 99,6; 102,7; 98,8; 100,9; 102,8; 98,7; 94,7; 97,8; 99,7; 98,6

Za předpokladu, že náhodné výběry pocházejí z normálních rozdělení, testujte, zda se střední hodnoty u obou skupin významně liší.

Řešení.
$H_0\colon \mu_h = \mu_m, H_1\colon \mu_h \neq \mu_m, \quad T \doteq 12{,}0478, \quad t_{0{,}975}(21) \doteq 2{,}080, \quad H_0$ zamítáme, $\mu_h > \mu_m$

□

Příklad 7.20. Skupina 8 dospělých mužů se zúčastnila studie, jak dieta a cvičení ovlivňuje hladinu cholesterolu v krvi. Hladina cholesterolu byla u všech změřena na začátku studie a pak po třech měsících, během kterých účastníci drželi určitou dietu a cvičili. Získaná data jsou v následující tabulce:

Číslo osoby	1	2	3	4	5	6	7	8
Na začátku	265	240	258	295	251	245	287	314
Na konci	229	231	227	240	238	241	234	256

Za předpokladu, že hladina cholesterolu v krvi má normální rozdělení, testujte, zda dieta a cvičení snižuje hladinu cholesterolu v krvi.

Řešení.

$H_0\colon \mu_1 = \mu_2, H_1\colon \mu_1 > \mu_2$, $T \doteq 4{,}1947$, $t_{0{,}95}(7) \doteq 1{,}895$, H_0 zamítáme

□

Příklad 7.21. Chemická továrna odebírá určitý typ suroviny od dvou dodavatelů. Průměrná koncentrace příslušného prvku v dodaném materiálu je u obou dodavatelů přibližně stejná, ale je tu podezření, že rozptyly se můžou významně lišit.

Z 10 náhodně vybraných vzorků od prvního dodavatele byla zjištěna výběrová směrodatná odchylka $s_1 = 4{,}7$ gramů na litr.

Ze 16 vzorků od druhého dodavatele to bylo $s_2 = 5{,}8$ gramů na litr.

Můžeme z toho udělat závěr, že se rozptyly významně liší? (Předpokládáme, že výběry pocházejí z normálního rozdělení.)

Řešení.

$H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1\colon \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, $F \doteq 0{,}6567$, $F_{0{,}025}(9,\,15) \doteq 0{,}265, F_{0{,}975}(9,\,15) \doteq 3{,}123$, H_0 nezamítáme

□

8 Regrese a korelace

Příklad 8.1. V nemocnici zjišťovali, kolik mg kyseliny mléčné je ve 100 ml krve u matek prvorodiček a u jejich novorozenců těsně po porodu. Získané výsledky jsou v následující tabulce:

Matka	25	31	40	64	34	15	57	45
Novorozenec	21	22	33	46	23	12	55	40

a) Pomocí regresní přímky popište závislost koncentrace kyseliny mléčné u novorozenců na koncentraci kyseliny mléčné u matek.

b) Jakou koncentraci kyseliny mléčné lze očekávat u novorozence, jehož matce naměřili koncentraci 40 mg/200 ml?

c) Určete odhad σ^2.

d) Kolik procent celkové variability koncentrace kyseliny mléčné u novorozence je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, $i = 1, \ldots, 8$, $\widehat{\beta}_0 \doteq -1{,}578613$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 0{,}8508968$
b) $\widehat{Y} \doteq 15{,}43932$, c) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 25{,}46928$, d) $R^2 \doteq 0{,}8974391$

□

Příklad 8.2. U jistého automobilu bylo provedeno měření spotřeby paliva (v litrech na 100 km) v závislosti na jeho rychlosti (v km/h) při zařazeném 4. rychlostním stupni. Byly získány následující výsledky:

Rychlost	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Spotřeba	6,1	5,8	6,0	6,2	6,8	8,9	9,3	13,5	14,1	15,1

a) Pomocí regresní paraboly popište závislost spotřeby paliva na rychlosti automobilu.

b) Jakou spotřebu paliva lze očekávat při rychlosti 96 km/h?

c) Určete odhad σ^2.

d) Kolik procent celkové variability spotřeby paliva je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i$, $i = 1, \dots, 10$, $\widehat{\beta}_0 \doteq 8{,}755758$, $\widehat{\beta}_1 \doteq -0{,}1320455$,
$\widehat{\beta}_2 \doteq 0{,}00144697$, b) $\widehat{Y} \doteq 9{,}414667$, c) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 0{,}7740173$, d) $R^2 \doteq 0{,}9561556$

□

Příklad 8.3. Byly sledovány měsíční výdaje za potraviny (v tisících Kč) u jednotlivých domácností v závislosti na počtu členů domácnosti a na čistém měsíčním příjmu domácnosti (v tisících Kč). Získané výsledky jsou v následující tabulce:

Výdaje za potraviny	12	8	9,8	3	15	9,5	10	11
Počet členů domácnosti	4	2	3	1	5	3	4	2
Čistý příjem	40	32	48	12	66	46	50	51

a) Pomocí regresní roviny popište závislost výdajů za potraviny na počtu členů domácnosti a na čistém příjmu domácnosti.

b) Jaké výdaje za potraviny lze očekávat u manželského páru s dvojčaty s čistým měsíčním příjmem 43 000 Kč?

c) Určete odhad σ^2.

d) Kolik procent celkové variability výdajů za potraviny je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + e_i$, $i = 1, \dots, 8$, $\widehat{\beta}_0 \doteq 0{,}9840959$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 0{,}8810639$,
$\widehat{\beta}_2 \doteq 0{,}1428455$, b) $\widehat{Y} \doteq 10{,}65071$, c) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 1{,}722757$, d) $R^2 \doteq 0{,}8961303$

□

Příklad 8.4. Během osmi letních dnů byla v jistém stánku v Brně sledována spotřeba zmrzliny v kilogramech v závislosti na okolní teplotě. Získané výsledky jsou v následující tabulce:

Teplota (°C)	32	35	31	35	30	32	30	31
Spotřeba zmrzliny (kg)	56	55	53	49	49	45	46	48

Za předpokladu, že výběr pochází z dvourozměrného normálního rozdělení, zjistěte, zda spotřeba zmrzliny závisí na teplotě.

Řešení.
$H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$, $\widehat{\rho} \doteq 0{,}3670958$, $T \doteq 0{,}96669$, $t_{0{,}975}(6) \doteq 2{,}447$,
nezamítáme H_0

□

Příklad 8.5. V několika zemích byla zkoumána úmrtnost na cirhózu jater v závislosti na spotřebě tvrdého alkoholu. Úmrtnost je vyjádřena počtem zemřelých na 100 000 obyvatel, spotřeba je v litrech na osobu starší 15 let za rok. Získané výsledky jsou v následující tabulce:

Spotřeba alkoholu	3,9	4,2	5,6	5,7	6,6	7,2	10,8	10,7	12,3	15,7	24,7
Úmrtnost	3,6	4,3	3,4	3,7	7,2	3,0	12,3	7,0	23,7	23,6	46,1

Za předpokladu, že výběr pochází z dvourozměrného spojitého rozdělení, zjistěte, zda úmrtnost na cirhózu jater závisí na spotřebě alkoholu.

Řešení.
$H_0 : X_i$ a Y_i jsou nezávislé, $H_1 : X_i$ a Y_i nejsou nezávislé, $\widehat{\rho}_S \doteq 0{,}7909091$,

$T \doteq 3{,}877426$, $t_{0{,}975}(9) \doteq 2{,}262$, zamítáme H_0

□

Příklad 8.6. Byla zkoumána výška postavy syna v závislosti na výšce postavy otce. Byly získány následující výsledky (v metrech):

Syn	1,65	1,76	1,92	1,61	1,78	1,83	1,88	1,75	1,92	1,75
Otec	1,66	1,77	1,91	1,64	1,74	1,76	1,82	1,70	1,95	1,74

a) Pomocí regresní paraboly popište závislost výšky syna na výšce otce.

b) Kolik procent celkové variability výšky syna je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i$, $i = 1, \ldots, 10$, $\widehat{\beta}_0 \doteq -9{,}0543$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 11{,}1427$,

$\widehat{\beta}_2 \doteq -2{,}8270$, b) $R^2 \doteq 0{,}9431016$

□

Příklad 8.7. Student tělesné výchovy zjišťoval v rámci své bakalářské práce souvislost mezi hmotností postavy a počtem provedených kliků. Byly zjištěny následující hodnoty:

Počet kliků	18	14	13	16	19	9	10	15	17	20	11	22
Hmotnost	75	76	84	90	83	80	81	97	72	99	82	91

Za předpokladu, že výběr pochází z dvourozměrného spojitého rozdělení, zjistěte se spolehlivostí 99 %, zda počet provedených kliků závisí na hmotnosti postavy.

Řešení.
$H_0 : X_i$ a Y_i jsou nezávislé, $H_1 : X_i$ a Y_i nejsou nezávislé, $\widehat{\rho}_S \doteq 0{,}3426573$,

$T \doteq 1{,}153404$, $t_{0{,}995}(10) \doteq 3{,}169$, nezamítáme H_0

□

Příklad 8.8. Byl zkoumán čas potřebný k donesení objednaného piva v restauraci v závislosti na vzdálenosti stolu od pípy. Byly získány následující výsledky:

Čas (min)	6	9	2	15	13	2	11	13	12	11
Vzdálenost (m)	4	12	2	26	13	1	15	17	16	7

a) Pomocí regresní paraboly popište závislost času potřebného k donesení objednaného piva na vzdálenosti stolu od pípy.

b) Určete reziduální rozptyl.

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i$, $i = 1, \ldots, 10$, $\widehat{\beta}_0 \doteq 1{,}500206$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 1{,}030496$, $\widehat{\beta}_2 \doteq -0{,}020475$, b) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 3{,}226128$

□

Příklad 8.9. Byly zkoumány výdaje za vánoční dárky v závislosti na čistém měsíčním příjmu. Byly získány následující výsledky v tisících Kč:

Výdaje	5,3	9,8	7,0	14,0	10,0	5,7	11,4	11,5	13,4	7,2
Čistý příjem	16	28	12	49	30	13	32	36	34	20

a) Pomocí regresní přímky popište závislost výdajů za vánoční dárky na čistém měsíčním příjmu.

b) Kolik procent celkové variability výdajů za vánoční dárky je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, $i = 1, \ldots, 10$, $\widehat{\beta}_0 \doteq 2{,}8105$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 0{,}2489$, b) $R^2 \doteq 0{,}8825638$

□

Příklad 8.10. Byla zkoumána úmrtnost na rakovinu plic (počet zemřelých na 100 000 obyvatel) v různých zemích v závislosti na množství vykouřených krabiček (ve stovkách kusů) za rok. Byly získány následující výsledky:

Úmrtnost	3,7	7,2	5,6	10,1	7,4	4,1	8,6	8,5	10,2	5,4
Počet krabiček	2,40	4,02	1,98	6,84	4,31	2,01	4,62	5,13	4,80	3,04

a) Pomocí regresní přímky popište závislost úmrtnosti na rakovinu na množství vykouřených krabiček.

b) Jakou úmrtnost lze očekávat v zemi, kde člověk měsíčně vykouří v průměru 40 krabiček?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, $i = 1, \ldots, 10$, $\widehat{\beta}_0 \doteq 1{,}7806$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 1{,}3536$, b) $\widehat{Y} \doteq 8{,}277945$
□

Příklad 8.11. Ve výzkumném ústavu zkoumali množství jistého biogenního aminu (v mg/kg) ve vepřovém mase v závislosti na teplotě skladování (ve °C). Byly zjištěny následující hodnoty:

Teplota	-12,6	-10,6	-19,2	2,0	-22,4	-10,0	4,0	-0,5	-7,4	-7,0	8,9	-12,4
Množství	3,3	2,7	2,0	1,9	1,7	1,8	4,2	3,7	2,6	3,0	4,7	4,0

Za předpokladu, že výběr pochází z dvourozměrného normálního rozdělení, zjistěte se spolehlivostí 99 %, zda množství biogenního aminu závisí na teplotě.

Řešení.
$H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$, $\widehat{\rho} \doteq 0{,}6150862$, $T \doteq 2{,}4669$, $t_{0{,}995}(10) \doteq 3{,}169$,
nezamítáme H_0
□

Příklad 8.12. V jedné obci byla zkoumána spotřeba tvrdého alkoholu (v dl za den) v závislosti na průměrné denní teplotě. Byly získány následující výsledky:

Spotřeba	10,5	4,7	12,7	2,5	5,6	11,7	1,9	5,0	4,1	6,4
Teplota	4	12	2	26	13	2	15	17	16	7

a) Pomocí regresní přímky popište závislost spotřeby tvrdého alkoholu na průměrné denní teplotě.

b) Určete reziduální součet čtverců.

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, $i = 1, \ldots, 10$, $\widehat{\beta}_0 \doteq 11{,}50424$, $\widehat{\beta}_1 \doteq -0{,}43809$, b) $S_e \doteq 28{,}5285$
□

Příklad 8.13. Lékaři zkoumali vliv hluku na zvýšení krevního tlaku. Na pokusných osobách byly zjištěny následující hodnoty

hluk [dB]	60	60	60	70	70	70	80	80	80	90	90	90	100	100	100
vzestup TK [mmHg]	1	0	1	2	5	1	4	3	2	4	8	5	9	7	6

a) Popište závislost vzestupu krevního tlaku na hladině hluku pomocí regresní přímky.

b) Jaký vzestup tlaku lze očekávat u člověka, který je vystaven hluku o intenzitě 85 dB?

c) Určete odhad σ^2.

d) Kolik procent celkové variability zvýšení krevního tlaku je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, $i = 1, \ldots, 15$, $\widehat{\beta}_0 = -9{,}2$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 0{,}1633$
b) $\widehat{Y} \doteq 4{,}6833$, c) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 2{,}1308$, d) $R^2 \doteq 0{,}7429$

□

Příklad 8.14. Pevnost ve smyku u pryže závisí na teplotě použité při vulkanizaci. Byla naměřena následující data:

teplota [°C]	138	140	144	146	148	152	153	157
pevnost [MPa]	5,3	5,5	5,8	5,6	5,1	4,4	4,1	3,9

a) Popište závislost pevnosti na teplotě pomocí regresní paraboly.

b) Jakou pevnost lze očekávat, jestliže teplota při vulkanizaci byla 150°C?

c) Určete odhad σ^2.

d) Kolik procent celkové variability pevnosti ve smyku je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i$, $i = 1, \ldots, 8$, $\widehat{\beta}_0 \doteq -149{,}5511$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 2{,}1965$, $\widehat{\beta}_2 \doteq -0{,}0078$
b) $\widehat{Y} \doteq 4{,}9386$, c) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 0{,}0932$, d) $R^2 \doteq 0{,}8747$

□

Příklad 8.15. (Malý, nepraktický, zato ručně počitatelný příklad)

x	-2	-1	0	1	2
Y	3,5	0,0	$-1{,}0$	1,5	7,0

a) Popište závislost Y na x pomocí regresní paraboly.

b) Určete odhad σ^2.

c) Kolik procent celkové variability Y je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i$, $i = 1, \ldots, 5$, $\widehat{\beta}_0 \doteq -0{,}8714$, $\widehat{\beta}_1 = 0{,}85$, $\widehat{\beta}_2 \doteq 1{,}5357$
b) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 0{,}0286$, c) $R^2 \doteq 0{,}9986$

□

Příklad 8.16. Měsíční spotřeba elektrické energie v chemické továrně závisí na počtu pracovních dnů v měsíci a na tom, kolik tun výsledného produktu za měsíc vyrobili. Hodnoty za poslední rok jsou v tabulce.

spotřeba	367	375	402	361	380	395	365	388	387	370	386	384
počet dnů	20	20	23	20	21	22	20	22	21	20	21	22
produkt	100	95	110	88	94	99	97	96	110	105	100	98

a) Popište závislost spotřeby energie na počtu dnů a objemu výroby pomocí regresní roviny.

b) Jakou spotřebu lze očekávat v únoru (nepřestupného roku), pokud bude vyrobeno 100 tun produktu?

c) Určete odhad σ^2.

d) Kolik procent celkové variability spotřeby energie je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i^2 + e_i$, $i = 1, \ldots, 12$, $\widehat{\beta}_0 \doteq 124{,}9275$, $\widehat{\beta}_1 \doteq 10{,}0485$, $\widehat{\beta}_2 \doteq 0{,}4435$
b) $\widehat{Y} \doteq 370{,}2471$, c) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 22{,}5934$, d) $R^2 \doteq 0{,}8841$

□

Příklad 8.17. (Malý, nepraktický, zato ručně počitatelný příklad)

x	1	-1	-1	1	0
z	1	1	-1	-1	0
Y	2,5	$-0{,}3$	$-1{,}8$	0,2	0,4

a) Popište závislost Y na x a z pomocí regresní roviny.

b) Určete odhad σ^2.

c) Kolik procent celkové variability Y je vysvětleno regresním modelem?

Řešení.
a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i^2 + e_i$, $i = 1, \ldots, 5$, $\widehat{\beta}_0 = 0{,}2$, $\widehat{\beta}_1 = 1{,}2$, $\widehat{\beta}_2 = 0{,}95$

b) $\widehat{\sigma}^2 \doteq 0{,}1050$, c) $R^2 \doteq 0{,}9781$

□

Příklad 8.18. Máme k dispozici údaje o bodech z 1. a 2. písemky z určitého předmětu u 12 náhodně vybraných studentů:

1. písemka	6	6	5	8	6	7	5	4	6	6	8	7
2. písemka	14	11	10	16	12	16	14	10	14	15	16	17

Za předpokladu, že výběr pochází z dvourozměrného normálního rozdělení, testujte, jestli existuje závislost mezi výsledky 1. a 2. písemky.

Řešení.

$H_0:$ výsledky písemek jsou nezávislé, tj. $\rho = 0$,
$H_1:$ výsledky písemkem nejsou nezávislé, tj. $\rho \neq 0$,
$\widehat{\rho} \doteq 0{,}7915$, $T \doteq 4{,}0955$, $t_{0{,}975}(10) \doteq 2{,}228$,
zamítáme H_0, tzn. mezi body z písemek existuje závislost.

□

Příklad 8.19. Zkoumáme, jestli lze závislost mezi obvodem hlavy a inteligencí popsat pomocí monotónní funkce. U deseti dospělých mužů podobného věku jsme zjistili následující hodnoty

obvod hlavy [cm]	57,2	55,1	58,3	56,7	54,8	57,0	58,5	56,4	54,9	53,6
IQ	102	98	125	103	95	138	100	112	116	99

Za předpokladu, že výběr pochází z dvourozměrného spojitého rozdělení, na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte, jestli lze závislost mezi obvodem hlavy a inteligencí popsat pomocí monotónní funkce.

Řešení.

$H_0:$ mezi obvodem hlavy a IQ neexistuje monotónní závislost, tj. $\rho_S = 0$;
$H_1:$ mezi obvodem hlavy a IQ existuje monotónní závislost, tj. $\rho_S \neq 0$;
$\widehat{\rho_S} \doteq 0{,}4424$, $T \doteq 1{,}3954$, $t_{0{,}975}(8) \doteq 2{,}306$,
nezamítáme H_0, tzn. neprokázala se monotónní závislost obvodu hlavy a inteligence.

□